Corrigé de l'exercice 4.7

Tout d'abord, si $n = 0$, on a, pour tout x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k = 0 \times x^0 = 0.$$

Supposons maintenant fixé un entier n strictement positif et cherchons une expression simple pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \to \sum_{k=0}^{n} kx^k \in \mathbb{R}$.
Définissons

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \end{array}$$

et calculons la fonction $G : x \in \mathbb{R} \to \int_0^x g(y)dy$, qui est (d'après le théorème 4.4 du cours) une primitive de g.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x) = \int_0^x g(y)dy &= \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} ky^{k-1} \right) dy \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x ky^{k-1}dy \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[y^k \right]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x^k - 0^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x^k. \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 1.10 du cours, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} && \text{si } x \neq 1\,; \\ &= n && \text{si } x = 1. \end{aligned}$$

Puisque G est une primitive de g, on peut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = G'(x)$. La dérivée de G, sur $\mathbb{R} - \{1\}$, nous est donnée par la formule de dérivation d'un quotient de fonctions dérivables : pour tout $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) \\ &= \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - (x^{n+1} - x) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

La valeur de g en 1 peut se calculer sans recourir à la fonction G :

$$\begin{aligned} g(1) &= \sum_{k=1}^{n} k \times 1^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} kx^k \\ &= 0 \times x^0 + \sum_{k=1}^{n} kx^k \\ &= xg(x) \\ &= \frac{(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)x}{(x-1)^2} && \text{si } x \neq 1\,; \\ &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{si } x = 1. \end{aligned}$$