Corrigé partiel des exercices 3.10 et 3.12

Exercice 3.10

a) La fonction $f_a : x \to \cos(x)e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_a'(x) = (\cos)'(x)\exp(x) + \cos(x)(\exp)'(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^x.$$

b) La fonction $f_b : x \to \sin(x)\mathrm{arctan}(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_b'(x) = \cos(x)\mathrm{arctan}(x) + \frac{\sin(x)}{1+x^2}.$$

c) La fonction $f_c : x \to x^2\sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_c'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x).$$

d) La fonction $f_d : x \to \tan(x)e^{-x}$ est le produit d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$f_d'(x) = (1 + \tan^2(x))e^{-x} + \tan(x)(-e^{-x}) = (\tan^2(x) - \tan(x) + 1)e^{-x}.$$

e) La fonction $f_e : x \to \mathrm{arcos}(x)\sqrt{x}$ est le produit d'une fonction définie sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$ et d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc définie sur $[-1;1] \cap \mathbb{R}^+ = [0;1]$ et dérivable sur $]-1;1[\cap \mathbb{R}_+^* =]0;1[$ [1].

1. Les théorèmes généraux sur la dérivation des fonctions composées permettent d'affirmer que f_e est dérivable sur $]0;1[$ mais ils ne permettent pas de dire si elle est ou non dérivable en 0 ou 1. En l'occurence, elle ne l'est pas, mais on ne le démontrera pas.

Pour tout $x \in]0;1[$,

$$f_e'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \text{arcos}(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

h) La fonction $f_h : x \to \text{arcos}(x)\text{arcsin}(x)\text{arctan}(x)$ est le produit de deux fonctions définies sur $[-1;1]$ et dérivables sur $]-1;1[$ et d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$. Commençons par calculer la dérivée de $g_h : x \in [-1;1] \to \text{arcos}(x)\text{arcsin}(x)$. Pour tout $x \in]-1;1[$,

$$g_h'(x) = \frac{\text{arcos}(x) - \text{arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} f_h'(x) &= g_h'(x)\text{arctan}(x) + \frac{g_h(x)}{1+x^2} \\ &= (\text{arcos}(x) - \text{arcsin}(x))\frac{\text{arctan}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\text{arcos}(x)\text{arcsin}(x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.12

[Remarque : lorsqu'on veut montrer qu'une composée de fonctions (qu'on notera $f \circ g$) est définie et dérivable sur un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (qu'on notera $\mathcal{E}$), il est souvent préférable d'adopter une rédaction assez concise (c'est souvent la première question d'un problème ; il ne s'agit pas d'y passer trop de temps) mais il convient néanmoins de donner tous les arguments nécessaires. Si f et g sont toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut se contenter de « $f \circ g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ». En revanche, si les domaines de définition et/ou de dérivabilité de f et g ne sont pas $\mathbb{R}$ tout entier, il faut bien préciser quels sont ces domaines et pourquoi, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $g(x)$ appartient au domaine de définition et de dérivabilité de $\mathbb{R}$.]

e) La fonction $f_e : x \to \frac{1}{2+\sin(x)}$ est la composée des fonctions $f_{e,1} : x \to \frac{1}{x}$ et $f_{e,2} : x \to 2 + \sin(x)$. La fonction $f_{e,1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $f_{e,2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{e,2}(x) = 2 + \sin(x) \geq 2 + (-1) = 1$ donc $f_{e,2}(x) \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, $f_e = f_{e,1} \circ f_{e,2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_e'(x) &= f_{e,2}'(x) f_{e,1}'(f_{e,2}(x)) \\ &= -\frac{\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}. \end{aligned}$$

f) La fonction $f_f : x \to \frac{1}{\cos^3(x)}$ est la composée des fonctions $f_{f,1} : x \to \frac{1}{x^3}$ et cos. La fonction $f_{f,1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$; cos est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f_f = f_{f,1} \circ \cos$ est donc définie et dérivable en tous les réels x tels que $\cos(x)$ appartient à $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\cos(x) \neq 0$. Elle est donc définie et dérivable sur

$$\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\begin{aligned} f_f'(x) &= \cos'(x) f_{f,1}'(\cos(x)) \\ &= \frac{3\sin(x)}{\cos^4(x)}. \end{aligned}$$

g) La fonction $f_g : x \to \sqrt{\frac{x^2-3}{x^4+e^x}}$ est la composée des fonctions $\sqrt{.}$ et $f_{g,2} : x \to \frac{x^2-3}{x^4+e^x}$. La fonction $\sqrt{.}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_{g,2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + e^x \geq e^x > 0$). La fonction $f_g = \sqrt{.} \circ f_{g,2}$ est donc définie en tout réel x tel que $f_{g,2}(x) \geq 0$ et dérivable en tout réel x tel que $f_{g,2}(x) > 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $x^4 + e^x > 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (f_{g,2}(x) \geq 0) &\iff (x^2 - 3 \geq 0) \\ &\iff (x^2 \geq 3) \\ &\iff (x \in \mathbb{R} -]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[). \end{aligned}$$

De même,

$$(f_{g,2}(x) > 0) \iff (x \in \mathbb{R} - [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]).$$

La fonction f_g est donc définie sur $\mathbb{R} -]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ et dérivable sur $\mathbb{R} - [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$,

$$\begin{aligned} f'_{g,2}(x) &= \frac{2x(x^4+e^x) - (x^2-3)(4x^3+e^x)}{(x^4+e^x)^2} \\ &= \frac{-2x^5 + 12x^3 + (-x^2+2x+3)e^x}{(x^4+e^x)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f'_g(x) &= f'_{g,2}(x)(\sqrt{.})' \circ f_{g,2}(x) \\ &= \frac{-2x^5 + 12x^3 + (-x^2+2x+3)e^x}{(x^4+e^x)^2} . \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4+e^x}{x^2-3}} \\ &= \frac{-2x^5 + 12x^3 + (-x^2+2x+3)e^x}{2(x^4+e^x)^{3/2}(x^2-3)^{1/2}}. \end{aligned}$$

h) La fonction $f_h : x \to \cos(\exp((\ln(x))^2))$ est la composée des fonctions cos, exp, $x \to x^2$ (qu'on notera « $.^2$ » dans la suite) et ln. Toutes ces fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à l'exception de ln, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_h est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'_h(x) &= \ln'(x)(\cos \circ \exp \circ (.^2))'(\ln(x)) \\ &= \frac{1}{x}(.^2)'(\ln(x))(\cos \circ \exp)'(\ln^2(x)) \\ &= \frac{2\ln(x)}{x} \exp'(\ln^2(x)) \cos'(\exp(\ln^2(x))) \\ &= -\frac{2\ln(x)}{x} \exp(\ln^2(x)) \sin(\exp(\ln^2(x))). \end{aligned}$$