Corrigé des exercices 10 bis et 10 ter

Exercice 10 bis

Introduction

- Le but est de démontrer que si une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ s'annule en chaque point d'une suite strictement décroissante tendant vers 0, alors toutes ses dérivées en 0 sont nulles.
- Dans l'exercice précédent, on considérait également une fonction s'annulant en tous les points d'une suite (finie, cette fois). On construisait à l'aide du théorème de Rolle une suite (toujours finie) en tous les points de laquelle la dérivée s'annulait. Nous allons pouvoir réutiliser ce mécanisme ici ; il s'applique de la même manière aux suites finies et infinies.
- Contrairement au précédent, cet exercice demande d'étudier les dérivées à tout ordre. Il va donc falloir répéter la construction dans le cadre d'un raisonnement par récurrence. En outre, il faudra ensuite se servir des suites construites pour obtenir des renseignements sur les valeurs de la fonction et de ses dérivées en 0, ce qui n'était pas le cas à l'exercice précédent.

1. La fonction f est continue (car $\mathcal{C}^\infty$). D'après le théorème de caractérisation séquentielle, puisque $x \to 0$, on a

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Puisque x est strictement décroissante, $x_{n+1} < x_n$. Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées sur $]x_{n+1}; x_n[$:

- f est continue sur $[x_{n+1}; x_n]$ (car elle l'est sur $\mathbb{R}$) ;
- f est dérivable sur $]x_{n+1}; x_n[$ (car elle l'est sur $\mathbb{R}$) ;
- $f(x_{n+1}) = 0 = f(x_n)$.

Il existe donc $y_n \in]x_{n+1}; x_n[$ tel que $f'(y_n) = 0$. Fixons un tel y_n.
La suite y ainsi construite converge vers 0 par encadrement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < y_n < x_n$ et x converge vers 0.
La fonction f' est continue donc, par le théorème de caractérisation séquentielle,

$$f'(0) = \lim_{n\to+\infty} f'(y_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

3. On commence par démontrer la propriété suivante :

« Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante et convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$. »

On procède par récurrence sur k.

- Initialisation : pour $k = 0$, la propriété est vraie ; la suite x vérifie en effet les propriétés requises.
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$ et montrons-la au rang $k+1$. Fixons $x^{(k)}$ une suite comme dans la propriété au rang k.

  Pour tout n, $x_{n+1}^{(k)} < x_n^{(k)}$. Vérifions les hypothèses du théorème de Rolle sur le segment $[x_{n+1}^{(k)}; x_n^{(k)}]$:

  — $f^{(k)}$ est continue sur $[x_{n+1}^{(k)}; x_n^{(k)}]$;

  — $f^{(k)}$ est dérivable sur $]x_{n+1}^{(k)}; x_n^{(k)}[$;

  — $f^{(k)}(x_{n+1}^{(k)}) = 0 = f^{(k)}(x_n^{(k)})$.

  Il existe donc $x_n^{(k+1)} \in]x_{n+1}^{(k)}; x_n^{(k)}[$ tel que $f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0$. Fixons un tel réel.

  La suite $x^{(k+1)}$ ainsi définie

  — est strictement décroissante : pour tout n, $x_{n+1}^{(k+1)} < x_{n+1}^{(k)} < x_n^{(k+1)}$;

  — converge vers 0 par encadrement, puisque pour tout n, $0 < x_{n+1}^{(k)} < x_n^{(k+1)} < x_n^{(k)}$ et $x^{(k)} \to 0$;

  — vérifie par construction que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0$.

  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

À l'aide de la propriété, nous pouvons conclure. Soit $k \geq 2$ quelconque. Soit $x^{(k)}$ comme dans la propriété. D'après le théorème de caractérisation séquentielle appliqué à la fonction continue $f^{(k)}$,

$$f^{(k)}(0) = \lim_{n \to +\infty} f^{(k)}(x_n^{(k)}) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0.$$

Bilan

Les questions 1 et 2 visaient à introduire les outils mathématiques nécessaires à la démonstration (le théorème de caractérisation séquentielle et l'utilisation du théorème de Rolle). Dans la question 3, il fallait appliquer ces outils de manière répétée, par récurrence, pour arriver au résultat voulu. La difficulté principale était de trouver une bonne formulation de la propriété de récurrence (en n'oubliant pas, notamment, l'hypothèse de décroissance).

Exercice 10 ter

Introduction

- Dans cet exercice, on démontre qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, si elle s'annule en chaque point d'une suite (non-stationnaire) tendant vers 0, a toutes ses dérivées nulles en 0.
- La propriété à démontrer est la même que dans l'exercice précédent. Seules les hypothèses sur x changent légèrement. On peut donc appliquer la même structure de raisonnement que dans la question 3 de l'exercice 10 bis.
- Ici, la suite x n'est pas supposée décroissante. Cela rend la construction par récurrence de l'exercice 10 bis invalide (notamment car, pour n, k fixés, l'intervalle $]x_{n+1}^{(k}; x_n^{(k}[$ peut être vide).

On démontre par récurrence la propriété suivante :

« Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, dont les termes sont tous non-nuls, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$. »

- Initialisation : montrons la propriété pour $k = 0$.

  Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang, il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{\phi(n)} \neq 0. \tag{1}$$

  Fixons une telle extraction et posons

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^{(0)} = x_{\phi(n)}.$$

  La suite $x^{(0)}$ converge vers 0 (c'est une sous-suite d'une suite qui converge vers 0). Ses termes sont non-nuls d'après la propriété (1). De plus, pour tout n, $f(x_n^{(0)}) = f(x_{\phi(n)}) = 0$.

- Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$ et montrons-la au rang $k+1$. Fixons $x^{(k)}$ comme dans la propriété au rang k.

  Puisque $f^{(k)}$ est continue, $f^{(k)}(0) = \lim_{n\to+\infty} f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$ d'après le théorème de caractérisation séquentielle.

  Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $f^{(k)}$ entre les points 0 et $x_n^{(k)} (\neq 0)$. On peut appliquer le théorème car

  — $f^{(k)}$ est continue sur $[0; x_n^{(k)}]$ (ou $[x_n^{(k)}; 0]$ si $x_n^{(k)} < 0$) ;

— $f^{(k)}$ est dérivable sur $]0; x_n^{(k)}[$ (ou $]x_n^{(k}; 0[$) ;

— $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0 = f^{(k)}(0)$.

Il existe donc $x_n^{(k+1)} \in]0; x_n^{(k)}[$ (ou $]x_n^{(k}; 0[$) tel que

$$f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0.$$

Fixons $x_n^{(k+1)}$ un tel réel.

En appliquant cette définition pour tout n, on définit une suite $x^{(k+1)}$. Elle vérifie les propriétés voulues :

— pour tout n, $x_n^{(k+1)} \neq 0$ par construction ;

— la suite $x^{(k+1)}$ tend vers zéro : pour tout n, $0 \leq |x_n^{(k+1)}| < |x_n^{(k)}|$; comme $(|x_n^{(k)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, on en déduit par encadrement que $(|x_n^{(k+1)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro et donc $x^{(k+1)}$ aussi ;

— pour tout n, $f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0$ par construction.

L'hypothèse de récurrence est donc vraie au rang $k + 1$.

On conclut comme dans l'exercice précédent.