Corrigé de l'exercice 16 bis

Introduction :

- Dans cet exercice, on considère une fonction $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant deux hypothèses : toutes ses dérivées sont nulles en 0 et, pour tout n, sa dérivée n-ième est bornée par $n!C^n$ (pour une constante $C > 0$). Il s'agit de montrer qu'alors f est la fonction nulle.
- Dans l'exercice précédent, on démontrait exactement le même résultat, avec des hypothèses sur f un peu différentes mais similaires, la principale étant, dans les deux cas, une majoration de $|f^{(n)}|$ pour tout n. De cet exercice on peut réutiliser les parties n'utilisant pas explicitement la forme de la majoration, c'est-à-dire le recours au théorème de Taylor-Lagrange (question 3) ainsi qu'au théorème de comparaison (question 4).
- Dans l'exercice 7.16, la majoration obtenue à la question 3 sur $|f(x)|$, pour x quelconque, tendait vers 0 lorsque n tendait vers $+\infty$. Dans l'exercice 7.16 bis, cette propriété n'est pas vraie pour tout x mais seulement pour $x \in]-1/C; 1/C[$ (à cause de la différence entre les hypothèses de majoration sur $|f^{(n)}|$, qui entraîne des majorations différentes pour $|f(x)|$). Il faut donc un argument nouveau pour démontrer que f est nulle sur tout $\mathbb{R}$ et non seulement sur $]-1/C; 1/C[$ (question 3).

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $c_{x,n}$ strictement compris entre 0 et x tel que

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}).$$

On distingue deux cas.

- Si $x = 0$, on sait d'après l'énoncé que $f(0) = f^{(0)}(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = 0$. On pose $c_{x,n} = 0$ et on a bien

$$f(0) = 0 = \frac{0^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

- Si $x \neq 0$, on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n-1)$ entre 0 et x. On peut l'appliquer car f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en particulier n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

  D'après cette formule, il existe $c_{x,n}$ strictement compris entre 0 et x tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}) \\ &= \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in]-1/C; 1/C[$ fixé. Montrons que $f(x) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait d'après la question 1 qu'il existe $c_{x,n} \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $c_{x,n} \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| |f^{(n)}(c_{x,n})| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| n! C^n = (C|x|)^n.$$

On a ainsi démontré la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f(x)| \leq (C|x|)^n.$$

La suite $((C|x|)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (c'est une suite géométrique de raison $C|x| \in]0; 1[$). La suite constante de valeur $|f(x)|$ converge vers $|f(x)|$. D'après le théorème de comparaison des limites, on peut donc déduire de l'inégalité précédente que

$$|f(x)| \leq 0.$$

Puisque $|f(x)| \geq 0$, on a exactement $f(x) = 0$.

3. <u>Première étape</u> : On a vu à la question précédente que, sur $]-1/C; 1/C[$, f était constante, de valeur 0. Puisque la dérivée d'une fonction constante est nulle, on voit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1/C; 1/C[, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

De plus, pour tout n, $f^{(n)}$ est continue donc

$$f^{(n)}(-1/C) = \lim_{x\to -1/C^+} f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(1/C) = \lim_{x\to 1/C^-} f^{(n)}(x) = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante est vraie :

$$\forall x \in [-1/C; 1/C], \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

<u>Deuxième étape</u> : Montrons maintenant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$\text{« Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \left[\tfrac{k-1}{C}; \tfrac{k+1}{C}\right],\ f^{(n)}(x) = 0. \text{ »}$$

- Initialisation : pour $k = 0$, on vient exactement de le démontrer.
- Hérédité : on suppose la propriété vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$. Démontrons-la au rang $k+1$, c'est-à-dire montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[\frac{k}{C}; \frac{k+2}{C}\right]$,
$$f^{(n)}(x) = 0.$$
Posons $\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \to f\left(x + \frac{k+1}{C}\right) \in \mathbb{R}$. Cette fonction vérifie les mêmes hypothèses que f :
— Elle est $\mathcal{C}^\infty$ car c'est une composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\tilde{f}^{(n)}(x)| = \left| f^{(n)}\left(x + \frac{k+1}{C}\right)\right| \leq n!C^n.$$
(On utilise ici l'égalité $\tilde{f}^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{k+1}{C}\right)$, vraie pour tous $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, qui se démontre par récurrence sur n.)
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $f^{(n)}\left(\frac{k+1}{C}\right) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a
$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{k+1}{C}\right) = 0.$$
Ainsi, en appliquant à $\tilde{f}$ le même raisonnement qu'on a appliqué à f, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{C}; \frac{1}{C}\right], \quad \tilde{f}^{(n)}(x) = 0.$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left[\frac{k}{C}; \frac{k+2}{C}\right]$,
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \tilde{f}^{(n)}\left(x - \frac{k+1}{C}\right) \\ &= 0 \text{ puisque } x - \frac{k+1}{C} \in \left[-\frac{1}{C}; \frac{1}{C}\right]. \end{aligned}$$
On a donc démontré que notre propriété était vraie au rang $k+1$.

Deuxième étape (bis) : par le même raisonnement qu'à l'étape précédente (qu'on ne reproduit pas ici puisqu'il est identique), on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left[\frac{(-k)-1}{C}; \frac{(-k)+1}{C}\right]$,

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

Troisième étape : pour $n = 0$, les propriétés démontrées aux étapes 2 et 2 bis nous disent que, pour tout x dans

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{(-k)-1}{C}; \frac{(-k)+1}{C}\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{k-1}{C}; \frac{k+1}{C}\right]\right) = \mathbb{R},$$

on a

$$f(x) = 0.$$

Cela démontre que f est la fonction nulle.

Conclusion :
Les questions 1 et 2 pouvaient être résolues avec un raisonnement très similaire à celui de l'exercice 7.16. Ce n'était pas le cas de la question 3. Pour cette question, il était utile de résumer le résultat démontré à ce stade (« Une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé est nulle sur $]-1/C; 1/C[$. »), de remarquer qu'on pouvait le renforcer légèrement (« Une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé est nulle sur $[-1/C; 1/C]$ et toutes ses dérivées aussi. ») pour pouvoir ensuite l'appliquer aux *translatées* de f (les fonctions de la forme $x \to f\left(x + \frac{k+1}{C}\right)$).