Corrigé de l'exercice 18 ter

Remarque à garder en tête : dans les exercices 18, 18 bis et 18 ter, on fait tous les calculs de développements limités sans recourir à la formule de Taylor-Young, pour s'entraîner. Néanmoins, dans certains cas, il peut être plus rapide de recourir à la formule de Taylor-Young, lorsque les fonctions considérées ont des dérivées successives relativement simples. C'est le cas notamment pour la question 4 de l'exercice 18 et la question 3 de l'exercice 18 bis.

1. On a calculé à la question 4. de l'exercice 18 le développement limité de cos en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3 : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (x - \pi/4) - \frac{1}{2}(x - \pi/4)^2 + \frac{1}{6}(x - \pi/4)^3\right) + (x - \pi/4)^3 \epsilon_1(x).$$

Le développement limité de sin en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3 est calculé dans le poly (exemple 2.18 ; il est même calculé à l'ordre 4) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x - \pi/4) - \frac{1}{2}(x - \pi/4)^2 - \frac{1}{6}(x - \pi/4)^3\right) + (x - \pi/4)^3 \epsilon_2(x).$$

Par produit de développements limités, on obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - (x-\pi/4) - \frac{1}{2}(x-\pi/4)^2 + \frac{1}{6}(x-\pi/4)^3\right) \\
&\qquad \times \left(1 + (x-\pi/4) - \frac{1}{2}(x-\pi/4)^2 - \frac{1}{6}(x-\pi/4)^3\right) + (x-\pi/4)^3\epsilon_3(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - (x-\pi/4) - \frac{1}{2}(x-\pi/4)^2 + \frac{1}{6}(x-\pi/4)^3\right. \\
&\qquad + (x-\pi/4) - (x-\pi/4)^2 - \frac{1}{2}(x-\pi/4)^3 \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}(x-\pi/4)^2 + \frac{1}{2}(x-\pi/4)^3 - \frac{1}{6}(x-\pi/4)^3\right) + (x-\pi/4)^3\epsilon_4(x) \\
&= \frac{1}{2} - (x-\pi/4)^2 + (x-\pi/4)^3\epsilon_4(x).
\end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que, pour tout x, $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ et obtenir le développement limité demandé en composant le développement limité de la fonction sin en $2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et la fonction $x \to 2x$.

2. La fonction f est la composée de $(x \to \ln(1+x))$ et de sin. Nous allons donc obtenir son développement limité en composant celui de sin en 0 et celui de $(x \to \ln(1+x))$ en $\sin(0) = 0$.
Le développement limité de sin en 0 à l'ordre 3 est : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x).$$

Celui de $(x \to \ln(1+x))$ est : pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x).$$

Composons ces deux développements limités : pour tout x,

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\epsilon_3(x) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_4(x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_4(x).
\end{aligned}$$

3. Ce développement limité est donné par le cours (section 2.2) : pour tout $x \in]-1; +\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + x^3\epsilon(x).\end{aligned}$$

4. Ce développement limité est donné par le cours (section 2.) mais, pour le plaisir, on va le recalculer à partir des développements limités de sin et cos. En effet, pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x); \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x).\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$,

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x)},$$

c'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{\cos}$ est la composée de $x \to \frac{1}{1+x}$ et de $x \to -\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x)$. On peut alors obtenir son développement limité par composition des DL respectifs de chacune de ces fonctions : pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_4(x).\end{aligned}$$

D'où, par produit de développements limités, pour tout $x \in]-\pi/2;\pi/2[$,

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + x^3\epsilon_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_6(x).$$

5. La fonction f est la composée de $(x \to \sqrt{1+x})$ et de sin. On peut donc obtenir son developpement limité en composant celui de sin en 0 et celui de $(x \to \sqrt{1+x})$ en $\sin(0) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x).$$

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_2(x).$$

On obtient donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\epsilon_4(x).\end{aligned}$$