Corrigé de l'exercice 21 bis

1. On a pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1;+\infty[-\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)}{x(x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x))} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + \epsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + x\epsilon_1(x)} \\
&\xrightarrow{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + 0}{1 - 0 + 0} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in]0;\pi[$, $\sin(x) > 0$ et $x > 0$, de sorte que $\frac{\sin(x)}{x} > 0$ et $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est bien défini. Ainsi, la fonction considérée est bien définie au moins sur $]0;\pi[$; étudier son éventuelle limite en 0^+ a un sens.
Tâchons de trouver un DL à l'ordre 2 en 0 de $x \to \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
On connaît le DL à l'ordre 3 de sin en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_2(x).$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x).$$

En particulier, $\frac{\sin(x)}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. On peut donc obtenir un DL à l'ordre 2 en 0 de $x \to \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ en composant le DL qu'on vient de trouver pour $x \to \frac{\sin(x)}{x}$ et le DL à l'ordre 2 de ln en 1, qui est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x) = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon_3(x).$$

La composition donne :

$$\forall x \in]0;\pi[, \qquad \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_4(x).$$

On en déduit que, pour tout $x \in]0;\pi[$,

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6} + \epsilon_4(x),$$

et donc que

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

3. Notons $f : x \to \frac{\sqrt{\sin(x^2)-x}}{\sin(x)-x}$ et $g : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$. On doit étudier le comportement en 0^+ de la fonction $f \circ g$. Puisque $g \overset{0^+}{\to} 0^+$, il suffit d'étudier le comportement de f en 0^+. Pour cela, nous allons effectuer un DL en 0 des numérateur et dénominateur de f.
Commençons par le dénominateur. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin(x) - x &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x) - x \\ &= -\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x).\end{aligned}$$

Effectuons maintenant un DL du numérateur en 0 à l'ordre 3 [1]. On obtient d'abord, en composant les DL de sin et de $x \to x^2$ en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x^2) = x^2 + x^4\epsilon_6(x).$$

1. à l'ordre 3 car le premier terme non-nul du DL de $x \to \sin(x) - x$ est celui d'ordre 3

Ainsi, pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin(x^2)} &= \sqrt{x^2 + x^4\epsilon_6(x)} \\ &= x\sqrt{1 + x^2\epsilon_6(x)}.\end{aligned}$$

En composant $x \to x^2\epsilon_6(x)$ avec le DL en 0 de $x \to \sqrt{1+x}$, on en déduit que, pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin(x^2)} &= x(1 + x^2\epsilon_7(x)) \\ &= x + x^3\epsilon_7(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\sin(x^2)} - x = x^3\epsilon_7(x),$$

Maintenant que nous avons obtenu les DL des numérateurs et dénominateurs de f, nous pouvons conclure : pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x^2)} - x}{\sin(x) - x} &= \frac{x^3\epsilon_7(x)}{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x)} \\ &= -6\frac{\epsilon_7(x)}{1 - \epsilon_5(x)} \\ &\xrightarrow{x \to 0^+} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $f \overset{0^+}{\to} 0$ et $\frac{\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$.