Corrigé partiel des exercices 7.25 et 7.25 bis

Ce corrigé reprend en très grande partie les indications envoyées par mail par José Trashorras.

1 Suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25 bis

Écrivons le DL en 0 à l'ordre 1 de sin : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc, pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on a par composition de limites que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = 1$$

Par conséquent $y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

De plus, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, puisque

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc, d'après la propriété de transitivité de $\sim$ on a $y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25 bis

Pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} &= \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{2}{n^2-1}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$ puisque

$$\frac{\frac{2}{n^2-1}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $x_n \sim \frac{2}{n^2}$.

3 Suite $(z_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25

Pour tout entier $n \geq 1$ on a $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$. Comme $\frac{\ln(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par le théorème des croissances comparées), on peut étudier le comportement de la suite à l'aide du DL de exp en 0.
Le DL de exp en 0 à l'ordre 1 est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = 1 + x + x\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} z_n &= n^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &= e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1 \\ &= 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) - 1 \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{\ln(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{z_n}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1+\varepsilon\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ pour tout $n \geq 2$, d'où, puisque $\epsilon \overset{0}{\to} 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\frac{z_n}{\frac{\ln(n)}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $z_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

4 Suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25

Posons

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to \left(\tfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}. \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x}$ et $\ln(1+x)$ sont bien définis et, de plus, $\frac{\ln(1+x)}{x} > 0$, de sorte que $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$ est bien défini. On a introduit cette fonction car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = F\left(\frac{1}{n}\right),$$

de sorte qu'on peut étudier le comportement de u_n lorsque $n \to +\infty$ en étudiant le comportement de F en 0.
Dans la suite, ε_1 et ε_2 sont des fonctions qui tendent vers 0 en 0. Pour tout

$x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$
\begin{aligned}
F(x) &\overset{(*)}{=} \left(\frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{x}\right)^{1/x} \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)\right)^{1/x} \\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)\right)\right) \\
&\overset{(\square)}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2} + x\epsilon_2(x)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2} + \epsilon_2(x)\right).
\end{aligned}
$$

L'égalité $(*)$ a été obtenue en utilisant le DL de $x \to \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 et l'égalité $(\square)$ en composant les DL de $x \to -\frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)$ et $x \to \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1.
Puisque $\epsilon_2 \overset{0}{\to} 0$, l'égalité précédente montre que

$$F(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Par composition de limites,

$$u_n = F\left(\frac{1}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{e}},$$

donc $\frac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{e}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{e}}$.

5 Suite $(z_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25 bis

Écrivons le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \cos(x)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$$

où ε_1 est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$. Ainsi, pour tout entier $n\geq 1$ on a

$$\begin{aligned} z_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x\in]-1,+\infty[$ on a

$$\ln(1+x)=x+x\varepsilon_2(x)$$

où ε_2 est une fonction définie sur $]-1,+\infty[$ qui vérifie $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$. Ainsi, pour tout entier $n\geq 1$ on a

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour tout $n\geq 1$,

$$\varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right)=\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\varepsilon_2\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Lorsque $n\to+\infty$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) &\to 0, && \text{(composition de limites)}\\ -\frac{1}{2}+\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) &\to -\frac{1}{2}, && \text{(par somme)}\\ -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) &\to 0, && \text{(par somme et produit de limites)}\\ \varepsilon_2\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) &\to 0. && \text{(par composition de limites)}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

et

$$\frac{z_n}{-\frac{1}{2n^2}}=1-2\varepsilon_3\left(\frac{1}{n}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1,$$

donc $z_n\sim-\frac{1}{2n^2}$.

6 Suite $(w_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice 7.25 bis

Pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \\ &= \frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n+1} \\ &= \frac{\ln(n^2)}{n+1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} \\ &= 2\frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} \end{aligned}$$

On remarque que $2\frac{\ln(n)}{n+1} \sim 2\frac{\ln(n)}{n}$. En effet,

$$\frac{2\frac{\ln(n)}{n+1}}{2\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Dit autrement : $2\frac{\ln(n)}{n+1} = 2\frac{\ln(n)}{n} + o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
De plus, $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} = o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)$. En effet, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1}}{2\frac{\ln(n)}{n}} = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln(n)}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{n} &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \\ \ln(n) &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Les théorèmes généraux sur les suites convergentes entraînent donc que

$$\frac{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1}}{2\frac{\ln(n)}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} = o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
Finalement, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
w_n &= 2\frac{\ln(n)}{n} + o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right) + o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right) \\
&= 2\frac{\ln(n)}{n} + o\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right) \\
&\sim 2\frac{\ln(n)}{n}.
\end{aligned}$$