Corrigé de l'exercice 7.26

1. Posons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x+e^x. \end{array}$$

Montrons que cette fonction est bijective.
Elle est strictement croissante (comme somme de fonctions strictement croissantes) et donc injective.
Pour montrer qu'elle est surjective, on remarque qu'elle est continue (comme somme de fonctions continues). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de $\mathbb{R}$ par f est donc un intervalle. De plus,

$$f(x) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \text{«} (-\infty)+0 \text{»} = -\infty,$$
$$f(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \text{«} (+\infty)+(+\infty) \text{»} = +\infty.$$

L'image de $\mathbb{R}$ par f n'est donc ni majorée ni minorée. Le seul intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne soit ni majoré ni minoré est $\mathbb{R}$ lui-même. On en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est surjective.
Ainsi, f est bien bijective. En conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = n$, c'est-à-dire tel que $x+e^x = n$.

2. Pour tout $n \geq 1$, d'après l'indication fournie,

$$n = x_n + e^{x_n} < 2e^{x_n}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $e^{x_n} > n/2$ et, comme la fonction ln est strictement croissante, cela entraîne

$$x_n > \ln(n/2).$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\ln(n/2) \to +\infty$. Par comparaison, on a donc

$$x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\ln(n) &= \ln(x_n + e^{x_n}) \\
&= \ln(e^{x_n}(1 + x_n e^{-x_n})) \\
&= \ln(e^{x_n}) + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) \\
&= x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}).
\end{aligned}$$

À l'aide de cette égalité, nous allons montrer l'équivalent $x_n \sim \ln(n)$. Pour cela, il suffit que nous montrions

$$\ln(1 + x_n e^{-x_n}) = o(x_n),$$

c'est-à-dire, puisque x est non-nulle à partir d'un certain rang (elle tend vers $+\infty$), qu'il suffit de montrer

$$\frac{\ln(1 + x_n e^{-x_n})}{x_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction $(x \to xe^{-x})$ tend vers 0 en $+\infty$, d'après le théorème des croissances comparées. Puisque $x_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit par composition de limites que

$$x_n e^{-x_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après les opérations usuelles sur les limites, on a donc

$$\ln(1 + x_n e^{-x_n}) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\frac{\ln(1 + x_n e^{-x_n})}{x_n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ll \frac{0}{(+\infty)} \gg = 0.$$

On a donc bien $\ln(1 + x_n e^{-x_n}) = o(x_n)$ et, ainsi,

$$\ln(n) = x_n + o(x_n),$$

donc $\ln(n) \sim x_n$.

4. D'après la question précédente, $y_n = -\ln(1 + x_n e^{-x_n})$ pour tout $n \geq 2$. D'après la question 2., pour tout $n \geq 2$, $x_n > \ln(n/2) \geq \ln(1) = 0$ donc $x_n e^{-x_n} > 0$ et, puisque ln est strictement croissante,

$$\ln(1 + x_n e^{-x_n}) > \ln(1) = 0$$

donc $y_n < 0$.
On a vu à la question précédente que $x_n \sim \ln(n)$, c'est-à-dire (d'après le cours) que $x_n - \ln(n) = o(\ln(n))$. Ainsi, $y_n = o(\ln(n))$.

5. Pour tout $n \geq 1$, $x_n = \ln(n) + y_n$ donc, puisque $x_n + e^{x_n} = n$, on a

$$n = \ln(n) + y_n + e^{\ln(n)+y_n} = \ln(n) + y_n + ne^{y_n}.$$

En divisant par n, on obtient l'égalité $\frac{y_n}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + e^{y_n} = 1$.
Étudions le comportement lorsque $n \to +\infty$ des différents termes de l'égalité précédente. Par croissance comparée, on sait que $\frac{\ln(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque $y_n = o(\ln(n))$, on a

$$\frac{y_n}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Ainsi, puisque $\frac{\ln(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi $\frac{y_n}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En conséquent,

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} - \frac{\ln(n)}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La fonction ln est continue en 1 donc

$$y_n = \ln(e^{y_n}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0.$$

6. Écrivons le DL de exp en 0 à l'ordre 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = 1 + x + x\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varepsilon \overset{0}{\to} 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc

$$e^{y_n} = 1 + y_n + y_n\varepsilon(y_n).$$

Puisque $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\varepsilon(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par composition de limites). En conséquent,

$$\frac{y_n\varepsilon(y_n)}{y_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que $y_n\varepsilon(y_n) = o(y_n)$ et donc que

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$

7. On remplace, dans l'égalité de la question 5., e^{y_n} par $1 + y_n + o(y_n)$ puis on soustrait 1 et on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{y_n}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + y_n + o(y_n) = 0.$$

Puisque $\frac{\frac{y_n}{n}}{y_n} = \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut dire que $\frac{y_n}{n} = o(y_n)$. Ainsi,

$$\frac{\ln(n)}{n} + y_n + o(y_n) = 0,$$

c'est-à-dire que $y_n - \left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) = o(y_n)$ et donc

$$y_n \sim -\frac{\ln(n)}{n}.$$