Corrigé de l'exercice 7.32

Commençons par montrer que, pour tout $x \in [0;1]$,

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2.$$

Soit $x \in [0;1]$ fixé.
Si $x = 0$, la double inégalité est vraie, puisque $1 + x = e^x = 1 + x + \frac{e}{2}x^2 = 1$.
Supposons maintenant que x ne vaut pas 0. La fonction exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange, il existe donc $y \in]0;x[$ tel que

$$\exp(x) = \exp(0) + \exp'(0)x + \exp''(y)\frac{x^2}{2},$$

c'est-à-dire

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^y.$$

Fixons un tel y.
On a $e^y > 0$ et, comme l'exponentielle est une fonction croissante et comme $y \leq 1$, on a aussi $e^y \leq e^1 = e$. Donc

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{e}{2}x^2.$$

Utilisons maintenant cette inégalité pour montrer que u a une limite et calculer celle-ci. L'inégalité nous permet d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque $\frac{1}{n+k}$ appartient à $[0;1]$,

$$1 + \frac{1}{n+k} \leq e^{\frac{1}{n+k}} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + \frac{e}{2}\frac{1}{(n+k)^2}. \tag{1}$$

Cela nous permet d'encadrer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Nous allons étudier la convergence des différents termes de cette expression lorsque $n \to +\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{2n} \\
&\overset{n\to+\infty}{\to} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right) - 0 \\
&= [\ln(1+x)]_0^1 \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

(À la troisième ligne, on a appliqué le théorème 3.29 du poly.)
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Le théorème d'encadrement nous permet donc d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Nous avons ainsi montré que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \overset{n\to+\infty}{\to} \ln(2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \overset{n\to+\infty}{\to} \ln(2).$$

Par encadrement, nous pouvons donc déduire de l'équation (1) que u converge vers $\ln(2)$.