Corrigé partiel de l'exercice 6 bis

La fonction f_3 est la composée de ln, $\sqrt{.}$ et $g_3 : x \to \frac{x+1}{x-1}$:

$$f_3 = \ln \circ \sqrt{.} \circ g_3.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x)$ est donc bien défini lorsque

1. $g_3(x)$ est bien défini, c'est-à-dire $x - 1 \neq 0$;
2. $g_3(x)$ appartient au domaine de définition de $\sqrt{.}$, c'est-à-dire $g_3(x) \geq 0$;
3. $\sqrt{g_3(x)}$ appartient au domaine de définition de ln, c'est-à-dire $\sqrt{g_3(x)} > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les conditions 2. et 3. sont équivalentes à

$$\begin{aligned} \left(g_3(x) \geq 0 \text{ et } \sqrt{g_3(x)} > 0\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad (g_3(x) > 0) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x+1}{x-1} > 0\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_3 est bien définie en x si $x \neq 1$ et $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$:

$$\mathcal{D}_{f_3} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

Étudions le domaine de dérivabilité. Les fonctions ln et g_3 sont dérivables sur leur domaine de définition ; $\sqrt{}$ est dérivable sur son domaine de définition privé de 0. D'après le théorème sur la dérivabilité des composées de fonctions dérivables, f_3 est dérivable sur tout son ensemble de définition, sauf en les éventuels réels $x \in \mathcal{D}_{f_3}$ tels que $\frac{x+1}{x-1} = 0$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_3}$, $\frac{x+1}{x-1} \neq 0$ puisque $-1 \notin \mathcal{D}_{f_3}$. Donc

$$\mathcal{D}'_{f_3} = \mathcal{D}_{f_3} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

Pour calculer la dérivée de f_3, on remarque que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_3}$,

$$f_3(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_3}$,

$$f_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{-1}{x^2-1}.$$

La fonction f_4 est aussi une composée : $f_4 = \ln \circ \ln \circ \ln$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_4 est bien définie en x si

1. ln est bien définie en x, c'est-à-dire $x > 0$;
2. ln est bien définie en $\ln(x)$, c'est-à-dire $\ln(x) > 0$, c'est-à-dire (puisque ln est strictement croissante) $x > 1$;
3. ln est bien définie en $\ln(\ln(x))$, c'est-à-dire $\ln(\ln(x)) > 0$, c'est-à-dire $\ln(x) > 1$, c'est-à-dire $x > e$.

Le domaine de définition de f_4 est donc

$$\mathcal{D}_{f_4} =]e; +\infty[.$$

La fonction ln est dérivable sur son ensemble de définition. Par composition, f_4 est donc également dérivable sur son ensemble de définition :

$$\mathcal{D}'_{f_4} = \mathcal{D}_{f_4} =]e; +\infty[.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_4}$, le théorème de dérivation des fonctions composées nous donne :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= (\ln \circ \ln)'(x) \ln'(\ln \circ \ln(x)) \\ &= \ln'(x) \ln'(\ln(x)) \ln'(\ln \circ \ln(x)) \\ &= \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}. \end{aligned}$$