Questions-réponses (Analyse 2, groupe 3)

May 5, 2020

Exercice 7.34

Prouver que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = 1.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx - 1 \right| &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx - \int_0^1 1 dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^n} - 1 \right) dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n} dx \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \right|
\end{aligned}$$

Pour tout n et pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n.$$

Donc, pour tout n,

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \overset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Donc

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx\right| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

càd

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx - 1\right| \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc on a montré le résultat demandé.

Exercice 7.33
2. Montrer que

$$\int_0^1 (f(x))^n dx \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Fixons $r \in]0;1[$. (On s'imagine que r est petit, plus proche de 0 que de 1.) Pour tout n

$$\int_0^{1-r} 0dx \leq \int_0^{1-r} f(x)^n dx \leq \int_0^{1-r} f(1-r)^n dx.$$

(L'inégalité de droite est due à la croissance de f : pour tout $x \in [0;1-r]$, $f(x) \leq f(1-r)$.) Donc, pour tout n,

$$0 \leq \int_0^{1-r} f(x)^n dx \leq f(1-r)^n \int_0^{1-r} 1dx = f(1-r)^n(1-r).$$

Or $0 < f(1-r) < 1$ (stricte croissance de f). Donc $(1-r)f(1-r)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par encadrement,

$$\int_0^{1-r} f(x)^n dx \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Considérons $\int_{1-r}^1 f(x)^n dx$ pour tout n. On a :

$$0 \leq \int_{1-r}^1 f(x)^n dx \leq \int_{1-r}^1 f(1)^n dx = \int_{1-r}^1 1dx = r.$$

Utilisons la définition de la limite. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Montrons qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$-\epsilon \leq \int_0^1 (f(x))^n dx \leq \epsilon.$$

Pour tout n, pour tout $r \in]0;1[$,

$$\int_0^1 f(x)^n dx = \int_0^{1-r} f(x)^n dx + \int_{1-r}^1 f(x)^n dx.$$

Si n est assez grand,

$$-\epsilon/2 \leq \int_0^{1-r} (f(x))^n dx \leq \epsilon/2.$$

De plus,

$$0 \leq \int_{1-r}^1 f(x)^n dx \leq r.$$

Donc, pour tout $r \in]0;1[$, pour tout n assez grand,

$$-\epsilon/2 \leq \int_0^1 f(x)^n dx \leq \epsilon/2 + r.$$

Posons $r = \epsilon/2$. On a alors que, pour tout n assez grand,

$$-\epsilon \leq -\epsilon/2 \leq \int_0^1 f(x)^n dx \leq \epsilon.$$

C'est ce qu'on voulait montrer.

Exercice 7.37 ter
$f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $\int_0^1 f(x)dx = 1/2$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = c$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour tout $c \in]0;1[$, $f(c) \neq c$. Graphiquement, cela signifie que le graphe de f n'intersecte pas celui de $(x \to x)$ sur $]0;1[$. Dans ce cas, on a deux possibilités :

- Pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) > x$.
- Pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) < x$.

(Justification plus rigoureuse : la fonction $x \in]0;1[\to f(x) - x$ est continue et ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, son signe est constant, strictement positif ou strictement négatif.)

Supposons que, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) > x$. (L'autre cas est identique.)

Alors, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) - x > 0$. Par continuité, on a aussi :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) - x \geq 0.$$

[Justification : pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) - x > 0 \geq 0$. En 0 : par continuité, $f(0) - 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) - x$ or la limite d'une fonction positive est positive. Donc $f(0) - 0$ est la limite d'une fonction positive ; c'est un nombre positif. Donc $f(0) - 0 \geq 0$. Même raisonnement en $x = 1$.]

Donc

$$\int_0^1 (f(x) - x)dx \geq 0.$$

De plus, la fonction $x \to f(x) - x$ est positive et continue et elle n'est pas nulle sur $[0;1]$ tout entier donc, par la proposition 3.42,

$$\int_0^1 (f(x) - x)dx \neq 0,$$

donc l'intégrale est strictement positive :

$$\int_0^1 (f(x) - x)dx > 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 (f(x) - x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xdx \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a atteint une absurdité.