Pré-rentrée calcul - notes

Première partie

11 septembre 2020

Définition 2.14 - Tangente :
Soit x un réel. S'il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, on définit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque 2.15 :
L'ensemble $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, en lesquels la fonction tangente n'est pas définie, correspond aux points où cos s'annule.
Le domaine de définition de tan est $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Valeurs numériques :
$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$
$\tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\tan(\pi/4) = 1$
$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Proposition 2.16 - Propriétés de la tangente :

1. La fonction tangente est π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x + k\pi) = \frac{\sin(x + k\pi)}{\cos(x + k\pi)} = \frac{(-1)^k \sin(x)}{(-1)^k \cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

[Explication sur l'égalité $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$:
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin((x + \pi) + \pi) = -\sin(x + \pi) = \sin(x)$

$\sin(x+3\pi) = \sin((x+2\pi)+\pi) = -\sin(x+2\pi) = -\sin(x)$
$\sin(x+4\pi) = \sin(x)$
$\sin(x+5\pi) = -\sin(x)$ ...
Par récurrence, on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin(x)$.
Par le même raisonnement, c'est vrai aussi si k est négatif.]

2. La fonction tangente est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

3. La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) \\
&= \left(\frac{\sin'\cos - \cos'\sin}{\cos^2}\right)(x) \\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\
&= 1+\tan^2(x).
\end{aligned}$$

4. $\tan(x) \xrightarrow{x\to-\frac{\pi}{2}^+} -\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow{x\to\frac{\pi}{2}^-} +\infty$.

Revoir la proposition 2.17.

Lire la proposition 2.18.

Exercice 2.22 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
(a) $\sin(|x|) = 1$

Cherchons toutes les solutions x telles que $x \geq 0$. Dans ce cas, $\sin(|x|) = \sin(x)$.
Donc $(\sin(|x|) = 1) \iff (\sin(x) = 1) \iff (x = \frac{\pi}{2}[2\pi])$
[Rappel sur la notion de "modulo 2π" : « $(x = \frac{\pi}{2}[2\pi])$ » veut dire :

> ... ou bien $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ ou bien $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ou bien $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi$ ou bien ...

On peut aussi noter « $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + (2\pi)k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ».]
Les solutions sont tous les réels $x \geq 0$ tels que $x = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, càd $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi$... (on remarque que $\frac{\pi}{2} - 2\pi < 0$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi < 0$, ...) En d'autres termes, les solutions sont $\left\{\frac{\pi}{2} + (2\pi)k, k \in \mathbb{N}\right\}$.

Cherchons toutes les solutions x telles que $x \leq 0$.
$(\sin(|x|) = 1) \iff (\sin(-x) = 1) \iff (-\sin(x) = 1) \iff (\sin(x) = -1) \iff (x = -\frac{\pi}{2}[2\pi])$
Les solutions sont tous les réels $x \leq 0$ tels que $x = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Cherchons donc, parmi les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + (2\pi)k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, lesquels sont négatifs ou nuls :
...
$-\frac{\pi}{2} - 4\pi$ est bien négatif.
$-\frac{\pi}{2} - 2\pi$ est bien négatif.
$-\frac{\pi}{2}$ est bien négatif.
$-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ est strictement positif.
$-\frac{\pi}{2} + 4\pi$ est strictement positif.
...
Les solutions sont $\{-\frac{\pi}{2} + (2\pi)k, k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 0\}$.

<u>Conclusion</u> : l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2} + (2\pi)k, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + (2\pi)k, k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 0\right\}.$$

(b) $\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Avant de résoudre, faisons remarquer que $\tan(2x)$ est bien définie pour tous les $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Commençons par résoudre l'équation $\tan(y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pour y réel.
La fonction tan est π-périodique donc il suffit de résoudre l'équation sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; cela donnera toutes les solutions modulo π.
Résolvons $\tan(y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

On a une solution "évidente", $y = \frac{\pi}{6}$. La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc il ne peut pas y avoir plus d'une solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc l'équation a une et une seule solution, $y = \frac{\pi}{6}$.
Déduisons-en les solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\tan(y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \iff \left(y = \frac{\pi}{6}\ [\pi]\right) \iff \left(y = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}\right)$$

Retour à l'équation de départ, $\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}\left(\tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &\iff \left(2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}\right)\\ &\iff \left(x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Les solutions sont donc

$$\left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) $|\cos(3x-2)| = \frac{\pi}{2}$
Il y a une "astuce".
Remarque : $\pi \approx 3,14$ donc $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$. En particulier, $\frac{\pi}{2} > 1$.
Or, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\cos(z) \in [-1; 1]$ donc $|\cos(z)| \leq 1$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(3x-2)| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ donc $|\cos(3x-2)| \neq \frac{\pi}{2}$.
Pas de solution.

(d) $\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -2$
Effectuons le changement de variable $y = \cos(2x)$ et résolvons d'abord

$$(y^2 - 3y = -2) \iff (y^2 - 3y + 2 = 0).$$

C'est une équation polynomiale de degré 2. On a une racine évidente, 1. La deuxième racine est 2.

$$(y^2 - 3y = -2) \iff (y = 1 \text{ ou } y = 2).$$

Donc

$$\begin{aligned}(\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -2) &\iff (\cos(2x) = 1 \text{ ou } \cos(2x) = 2)\\ &\iff (\cos(2x) = 1)\\ &\iff (2x = (2\pi)k \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z})\\ &\iff (x = k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z}.$$

[Explication sur la différence entre "pour un certain k" et "pour tout k" :
"($x = k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$)" veut dire "(... et $x = -\pi$ et $x = 0$ et $x = \pi$ et $x = 2\pi$ et ...)", propriété qu'aucun x ne vérifie, puisqu'un réel ne peut pas être simultanément égal à 0, à π, à 2π etc.
"($x = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$)" veut dire "il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\pi$". Cette propriété-là est vérifiée, par exemple, par 2π (qui est égal à $k\pi$ pour $k = 2$), par -7π (qui est égal à $k\pi$ pour $k = -7$) ...]