Pré-rentrée calcul

Deuxième partie

11 septembre 2020

Théorème et définition 2.19 - fonction $\arcsin : [-1;1] \to \mathbb{R}$
Pour tout $t \in [-1;1]$, il existe un unique réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = t$. On note ce réel $\arcsin(t)$. Cela définit une fonction qu'on appelle "arc-sinus".

Valeurs numériques :
$\arcsin(-1) = ?$
Ce nombre est la seule solution x dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation

$$\sin(x) = -1.$$

Cette solution est $x = -\frac{\pi}{2}$.
Donc $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$\arcsin(0) = 0$
$\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$
$\arcsin(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{3}$
$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 2.21 :

1. Soit $y \in [-1;1]$ quelconque. Que vaut $\sin(\arcsin(y))$?
   D'après la définition de la fonction arc-sinus, $\arcsin(y)$ est la seule solution x dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation
   $$\sin(x) = y.$$
   Donc $\sin(\arcsin(y)) = y$.
2. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ quelconque. Que vaut $\arcsin(\sin(x))$?

D'après la définition de la fonction arc-sinus, $\arcsin(\sin(x))$ est la seule solution z dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation

$$\sin(z) = \sin(x).$$

(Attention, ici, x est fixé ; l'inconnue est z.)
Or $z = x$ est solution de cette équation et x appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Donc x est la solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$.

Attention
Dans la proposition précédente, la deuxième propriété est valable *seulement pour les* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Par exemple, $\arcsin(\sin(2\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq 2\pi$.

Proposition 2.22 - dérivée de $\arcsin$ **et propriétés importantes :**
La fonction arcsin est définie de $[-1; 1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est continue, impaire et strictement croissante sur $[-1; 1]$.
De plus, elle est dérivable sur $]-1; 1[$ et, pour tout $y \in]-1; 1[$,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Attention
La fonction arcsin est définie en -1 et en 1 mais elle n'y est pas dérivable.

Théorème et définition 2.23 - fonction $\arccos : [-1; 1] \to \mathbb{R}$
Pour tout $t \in [-1; 1]$, il existe un unique réel $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos(x) = t$. On note ce réel $\arccos(t)$. La fonction ainsi définie est appelée "arc-cosinus".

Proposition 2.25 - $\arccos(-y)$
Pour tout $y \in [-1; 1]$, on a

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos(y).$$

<u>Explication</u> : pour tout $y \in [-1; 1]$, $\arccos(y)$ est le seul réel x dans $[0; \pi]$ tel que

$$\cos(x) = y.$$

D'après les propriétés usuelles de cos, si $\cos(x) = y$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) = -y.$$

De plus, si x est compris entre 0 et π, $\pi - x$ est aussi compris entre 0 et π. Donc $\pi - x$ est la solution z dans $[0;\pi]$ de l'équation

$$\cos(z) = -y.$$

Ainsi, $\arccos(-y) = \pi - x = \pi - \arccos(y)$.

Proposition 2.26

1. Pour tout $y \in [-1;1]$, $\cos(\arccos(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

Proposition 2.27 - dérivée de $\arccos$ **et propriétés importantes**
La fonction arccos est définie de $[-1;1]$ dans $[0;\pi]$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$. De plus, elle est dérivable sur $]-1;1[$ et, pour tout $y \in]-1;1[$,

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Théorème et définition 2.28 - fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **:**
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = t$. On note ce réel $\arctan(t)$. La fonction ainsi définie est appelée "arc-tangente".

Proposition 2.30 :

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Proposition 2.31 - dérivée de $\arctan$ **et propriétés importantes :**
La fonction arctan est définie de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire. Elle admet les limites suivantes :

$$\arctan(x) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2};$$
$$\arctan(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Exercice 2.23 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(b) $\sin(|\arcsin(x)|) = -x$
Cette équation a un sens lorsque x est dans le domaine de définition de arcsin, càd lorsque $x \in [-1; 1]$.

- Cherchons les solutions $x \in [-1; 1]$ telles que $\arcsin(x) \geq 0$.
  [Remarque : $\arcsin(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0; 1]$. Justification : $\arcsin(0) = 0$ et arcsin est strictement croissante. Donc pour tout $x \in [0; 1]$, $\arcsin(x) \geq \arcsin(0) = 0$ et pour tout $x \in [-1; 0[$, $\arcsin(x) < \arcsin(0) = 0$.]
  Pour tout $x \in [0; 1]$, puisque $\arcsin(x) \geq 0$,
  $$\begin{aligned}(\sin(|\arcsin(x)|) = -x) &\iff (\sin(\arcsin(x)) = -x)\\ &\iff (x = -x) \text{ (Prop. 2.21)}\\ &\iff (x = 0).\end{aligned}$$
  Une seule solution sur $[0; 1]$: 0.
- Cherchons les solutions $x \in [-1; 1]$ telles que $\arcsin(x) < 0$.
  [Remarque : $\arcsin(x) < 0$ si et seulement si $x \in [-1; 0[$.]
  Pour tout $x \in [-1; 0[$,
  $$\begin{aligned}(\sin(|\arcsin(x)|) = -x) &\iff (\sin(-\arcsin(x)) = -x)\\ &\iff (-\sin(\arcsin(x)) = -x)\\ &\iff (\sin(\arcsin(x)) = x)\\ &\iff (x = x) \text{ (Prop 2.21).}\end{aligned}$$
  L'équation $(x = x)$ est satisfaite par tous les réels x dans $[-1; 0[$.
  Solutions sur $[-1; 0[$: $[-1; 0[$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est
$$\{0\} \cup [-1; 0[= [-1; 0].$$

(c) $\arccos(\sin(x)) = x$
Ici, raisonner par équivalence est difficile. On va plutôt raisonner par *analyse-synthèse.*

Analyse : on cherche des propriétés simples que doivent vérifier les solutions, pour restreindre l'ensemble des solutions possibles.

Soit $x \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $\arccos(\sin(x)) = x$.
Alors $\cos(\arccos(\sin(x))) = \cos(x)$. Donc, par la proposition 2.26, $\sin(x) = \cos(x)$, càd

$$\tan(x) = 1.$$

[On peut diviser par $\cos(x)$ car $\cos(x) \neq 0$: par l'absurde, si $\cos(x) = 0$, $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -1$ donc $\sin(x) \neq \cos(x)$.]
L'équation $\tan(x) = 1$ a une seule solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, qui est $\frac{\pi}{4}$. Par π-périodicité de tan, puisque $\tan(x) = 1$, alors

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}.$$

Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
Puisque $\arccos(\sin(x)) = x$, on doit avoir

$$\begin{aligned} &\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{donc} \quad &\arccos\left((-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

Donc, si k est pair, $\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Or $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Donc $k = 0$.
Maintenant, si k est impair, $\arccos\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Or, d'après la proposition 2.25, $\arccos\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi - \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Donc

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Donc $k = 1/2$. Impossible puisque k est un entier.
La seule valeur possible pour k est 0 donc

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Nous avons donc montré que si x est une solution de l'équation, alors $x = \frac{\pi}{4}$.
Donc $\frac{\pi}{4}$ est la seule solution possible.

<u>Synthèse</u> : on vérifie si $\frac{\pi}{4}$ est solution.

$\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $x = \frac{\pi}{4}$ est bien solution de $\arccos(\sin(x)) = x$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Exercice 2.25 :
Dans cet exercice, on va montrer que pour tout $y \in [-1;1]$,

$$\cos(\arcsin(y)) = \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

Ce résultat pouvant servir à calculer les dérivées des fonctions arccos et arcsin, nous n'utiliserons pas la dérivée de ces fonctions dans l'exercice.

1. (a) Montrer que, pour tout $y \in [-1;1]$, on a $\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2$.
Pour tout $y \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned}\cos^2(\arcsin(y)) &= 1 - \sin^2(\arcsin(y)) \\ &= 1 - (\sin(\arcsin(y))^2 \\ &= 1 - y^2.\end{aligned}$$

(b) En déduire que, pour tout $y \in [-1;1]$, on a $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$.
Puisque $(\cos(\arcsin(y)))^2 = 1 - y^2$, $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$ ou $-\sqrt{1-y^2}$.
Pour montrer que $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$, il suffit de montrer que $\cos(\arcsin(y)) \geq 0$.
On sait que $\arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et que cos est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(\arcsin(y)) \geq 0$.
Donc $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$.