Pré-rentrée calcul

Première partie

15 septembre 2020

Des questions ?

.

Exercice 3.6 :
Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers 1^+ et vers 1^-.

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}; \tag{a}$$

$$\frac{\sin(x)}{x-1}; \tag{b}$$

$$\frac{-(x+1)^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}; \tag{c}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}. \tag{d}$$

[Indication pour (c) : factoriser par $x - 1$.]

(a) $\dfrac{1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \xrightarrow{x \to 1} 1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$

Forme indéterminée « $\frac{1}{0}$ ».

Peut-on étudier le signe du dénominateur pour lever l'indétermination?

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= (x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)(x-1)^2 \\ &= (x-1)^3 \end{aligned}$$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < 1$:

$x - 1 < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$.

Donc quand x tend vers 1^-, $x^3 - 3x + 3x - 1$ est strictement négatif.

Donc $\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1} \xrightarrow{x\to 1^-}$ « $\frac{1}{0^-}$ » $\boxed{=-\infty.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tq $x>1$, $(x-1)^3>0$.

Donc $\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1} \xrightarrow{x\to 1^+}$ « $\frac{1}{0^+}$ » $\boxed{=+\infty}$

(e) $\frac{\sin(x)}{x-1}$?

$\sin(x) \xrightarrow{x\to 1} \sin(1)$ (car sin est continue)

$x-1 \xrightarrow{x\to 1} 0$

Forme indéterminée « $\frac{\sin(1)}{0}$ ».

Étudions le signe du dénominateur.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tq $x<1$, $x-1<0$.

De plus, $0<1<\pi$ et sin est strictement positive sur $]0;\pi[$ donc $\sin(1)>0$.

$\frac{\sin(x)}{x-1} \xrightarrow{x\to 1^-}$ « $\frac{\sin(1)}{0^-}$ » $\boxed{=-\infty}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tq $x>1$, $x-1>0$ (càd « $x-1 \xrightarrow{x\to 1^+} 0^+$ »)

donc $\frac{\sin(x)}{x-1} \xrightarrow{x\to 1^+}$ « $\frac{\sin(1)}{0^+}$ » $\boxed{=+\infty.}$

(c) $\dfrac{-(x+1)^2+3x+1}{(x-1)^2}$?

$-(x+1)^2+3x+1 \xrightarrow{x\to 1} -(1+1)^2+3.1+1=-4+3+1=0$

$(x-1)^2 \xrightarrow{x\to 1} (1-1)^2=0$

Forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

Rq : soient f, g deux fonctions. Si $f \xrightarrow{1} 0$ et $g \xrightarrow{1} \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f/g \xrightarrow{1} 0$ (pas de forme indéterminée)

Factorisons le numérateur :

$$\begin{aligned} -(x+1)^2+3x+1 &= -x^2-2x-1+3x+1 \\ &= -x^2+x \\ &= x(-x+1) \\ &= -x(x-1) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\frac{-(x+1)^2+3x+1}{(x-1)^2} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-x}{x-1}.$$

$\dfrac{-x}{x-1} \xrightarrow{x\to 1^-}$ « $\dfrac{-1}{0^-}$ » $\boxed{= +\infty.}$

$\dfrac{-x}{x-1} \xrightarrow{x\to 1^+}$ « $\dfrac{-1}{0^+}$ » $\boxed{= -\infty.}$

(d) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1}$?

$x^3-x^2-x+1 \xrightarrow{x\to 1} 1^3-1^2-1+1 = 1-1-1+1=0.$

$x^2-2x+1 \xrightarrow{x\to 1} 1^2-2.1+1 = 1-2+1=0.$

Forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». Factorisons : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

et $x^2-2x+1 = (x-1)^2$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2} = x+1.$$

Donc $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1} \xrightarrow{x\to 1^+ \text{ ou } 1^-} 1+1 \boxed{= 2}.$

Exercice 3.8 :
Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1; \tag{a}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = +\infty; \tag{b}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1. \tag{c}$$

On pourra penser à utiliser que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{x} \xrightarrow{x\to 0} \ln'(1) = 1.$$

(taux d'accroissement de $\ln$ entre 1 et $1+x$)

(a) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ ?

$1+x \xrightarrow{x\to 0^+} 1$ $\qquad \dfrac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0^+}$ « $\dfrac{1}{0^+}$ » $= +\infty$

Forme indéterminée « $1^{(+\infty)}$ ».

Pour lever l'indétermination, utilisons la définition des fonctions puissances :

pour tout $x > 0$, $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\ln(1+x) \times \dfrac{1}{x}\right)$

$= \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right).$

$\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0^+} 1$ (indication)

De plus, exp est continue en 1. Donc

$(1+x)^{1/x} \xrightarrow{x\to 0^+} \exp(1) \boxed{= e}.$

(b) $(1+x)^{1/x^2}$ en 0^+ ?

$1+x \xrightarrow{x\to 0^+} 1$ $\qquad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to0^+} « \frac{1}{0^+} » = +\infty$

Forme indéterminée « $1^{(+\infty)}$ ».

Pour tout $x>0$, $(1+x)^{1/x^2} = \exp\left(\ln(1+x)\times\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \exp\Big(\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow{x\to0^+} 1} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x\to0^+} +\infty} \Big)$$

$\xrightarrow{x\to0^+}$ « $1\times(+\infty)$ » $=+\infty$

Or $\exp(y) \xrightarrow{y\to+\infty} +\infty$ donc,

par composition de limites, $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to0^+} \boxed{+\infty}$.

(c) $(1+x)^{1/\sqrt{x}}$ en 0^+ ?

$1+x \xrightarrow{x\to0^+} 1$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to0^+} +\infty$ donc forme indéterminée « $1^{(+\infty)}$ ».

Pour tout $x>0$,

$$(1+x)^{1/\sqrt{x}} = \exp\left(\ln(1+x)\times\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow{x\to0^+} 1}\times\underbrace{\sqrt{x}}_{\xrightarrow{x\to0^+} 0}\Big)$$

$\xrightarrow{x\to0^+} 0$

De plus, exp est continue en 0

donc $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\sqrt{x}\right) \xrightarrow{x\to0^+} \exp(0) \boxed{=1}$.

Exercice 3.9 :
Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

$$e^{\frac{1}{x}}; \tag{a}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2-1}; \tag{b}$$

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}; \tag{c}$$

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1}. \tag{d}$$

(a) $e^{1/x}$ en $+\infty$ et $-\infty$?

$\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ et exp est continue en 0

donc $e^{1/x} \xrightarrow{x\to+\infty} e^0 \boxed{=1}$.

$\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to-\infty} 0$ et exp est continue en 0

donc $e^{1/x} \xrightarrow{x\to-\infty} e^0 \boxed{=1}$.

(b) $\frac{x^3+1}{x^2-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$?

$x^3+1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ et $x^2-1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

donc forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever l'indétermination, mettons le terme dominant en facteur au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;+1\}$,

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^3(1+1/x^3)}{x^2(1-1/x^2)} = x \times \frac{1+1/x^3}{1-1/x^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{x^3} \xrightarrow{x\to+\infty} 1+0=1 \\ 1-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 1-0=1 \\ x \xrightarrow{x+\infty} +\infty \end{array}\right\} \quad x \times \frac{1+1/x^3}{1-1/x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty \times \frac{1}{1} \boxed{= +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{x^3} \xrightarrow{x\to-\infty} 1+0=1 \\ 1-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to-\infty} 1-0=1 \\ x \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty \end{array}\right\} \quad x \times \frac{1+1/x^3}{1-1/x^2} \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty \times \frac{1}{1} \boxed{= -\infty}$$

(c) $\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$?

$e^{2x}+1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ et $e^{3x}-1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

donc forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

On met en facteur le terme dominant : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1} = \frac{e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})}{e^{3x}(1-\frac{1}{e^{3x}})} = e^{-x} \times \frac{1+1/e^{2x}}{1-1/e^{3x}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \quad (\text{car } \exp \xrightarrow{-\infty} 0) \\ 1+\frac{1}{e^{2x}} \xrightarrow{x\to+\infty} 1+0=1 \\ 1-\frac{1}{e^{3x}} \xrightarrow{x\to+\infty} 1-0=1 \end{array}\right\} \quad e^{-x} \times \frac{1+1/e^{2x}}{1-1/e^{3x}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \times \frac{1}{1} \boxed{= 0}$$

$$e^{2x}+1 \xrightarrow{x\to-\infty} 0+1=1$$

$$e^{3x}-1 \xrightarrow{x\to-\infty} 0-1=-1$$

Donc $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1} \xrightarrow{x\to-\infty} \dfrac{1}{-1} \boxed{=-1.}$

(d) $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1}$ en $+\infty$ et $-\infty$?

$$|x| \xrightarrow[\text{ou } x\to-\infty]{x\to+\infty} +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{|x|+1} \xrightarrow{x\to+/-\infty} +\infty \\ \sqrt{|x|-1} \xrightarrow{x\to+/-\infty} +\infty \end{array}\right\}$$

Forme indéterminée « $(+\infty)-(+\infty)$ »

Pour tout $x \in \mathbb{R} -]-1,1[$,

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1} = \frac{(\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|-1})(\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1})}{\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1}}$$

$$= \frac{(|x|+1)-(|x|-1)}{\sqrt{|x|+1}+\sqrt{|x|-1}}$$

$$= \frac{2}{\underbrace{\sqrt{|x|+1}}_{\xrightarrow{x\to+/-\infty} +\infty}+\underbrace{\sqrt{|x|-1}}_{\xrightarrow{x\to+/-\infty} +\infty}}$$

$$\xrightarrow{x\to+/-\infty} « \frac{2}{+\infty} » \boxed{= 0.}$$