Pré-rentrée calcul

Deuxième partie

15 septembre 2020

Croissances comparées :

> « En $+\infty$, exp tend très vite vers $+\infty$. En $-\infty$, exp tend très vite vers 0. Elle écrase les fonctions puissances et logarithmes. »

Proposition 3.27 - Croissance comparée, I :
Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$,

$$e^{ax} x^b \ln^c(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} e^{ax};$$

$$e^{ax} |x|^b \ln^c(|x|) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} e^{ax}.$$

On applique 3.27 pour $a=1$, $b=-10000$, $c=0$.

Exemple :

$e^x \times x^{-10000}$

$$\frac{e^x}{x^{10000}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

> « En $+\infty$, ln tend très lentement vers $+\infty$. En 0, ln tend très lentement vers $-\infty$. Elle est écrasée par les fonctions puissances. »

Proposition 3.29 - Croissance comparée, II :
Pour tous $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$,

$$x^b \ln^c(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x^b;$$

$$|x|^b \ln^c(|x|) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} |x|^b.$$

Proposition 3.31 - Croissance comparée, III :
Pour tous $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$,

$$x^b |\ln(x)|^c \xrightarrow{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} x^b.$$

Exemple :

$$\sqrt{x}(\ln(x))^{100} \xrightarrow{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

$\hookrightarrow = x^{1/2} |\ln(x)|^{100}$

Exercice 3.11 :
Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0.

$$\frac{1}{x^2} + \ln(|x|); \tag{b}$$

$$e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{2}{x^2}}; \tag{a}$$

$$\frac{1 + e^{-x}}{(e^x - 1)^2 - |x| \ln |x|}. \tag{c}$$

(b) $\frac{1}{x^2} + \ln |x|$ en $x \to 0$?

$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0}$ « $\frac{1}{0^+}$ » $= +\infty$

$\ln |x| \xrightarrow{x\to 0} -\infty$ (car $\ln \xrightarrow{0} -\infty$ et $|x| \xrightarrow{x\to 0} 0$)

Donc forme indéterminée « $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Mettons en facteur le terme dominant (« $\frac{1}{x^2}$ »).

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$\frac{1}{x^2} + \ln |x| = \frac{1}{x^2}(1 + x^2 \ln |x|)$.

$x^2 \ln|x| \xrightarrow{x\to 0} \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (par croissance comparée)

donc $1 + x^2 \ln|x| \xrightarrow{x\to 0} 1$

et $\frac{1}{x^2}(1+x^2\ln|x|) \xrightarrow{x\to 0}$ « $\frac{1}{0^+}$ » $\boxed{= +\infty.}$

(a) $e^{1/x^2} - e^{2/x^2}$ quand $x \to 0$?

$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$ donc $e^{1/x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$

$\frac{2}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$ donc $e^{2/x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$

Forme indéterminée « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

Mettons en facteur le terme dominant (« e^{2/x^2} »).

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$e^{1/x^2} - e^{2/x^2} = e^{2/x^2}\left(e^{1/x^2} e^{-2/x^2} - 1\right)$$
$$= e^{2/x^2}\left(e^{-1/x^2} - 1\right).$$

$-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} -\infty$ donc $e^{-1/x^2} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{-\infty} \exp = 0$

donc $e^{-1/x^2} - 1 \xrightarrow{x\to 0} 0 - 1 = -1$

$e^{2/x^2} \xrightarrow{x\to 0} +\infty$ donc

$e^{2/x^2}\left(e^{-1/x^2} - 1\right) \xrightarrow{x\to 0}$ « $(+\infty)\times(-1)$ »

$\boxed{= -\infty}$

(c) $\dfrac{1+e^{-x}}{(e^x-1)^2-|x|\ln|x|}$ quand $x \to 0$?

$1+e^{-x} \xrightarrow{x\to 0} 1+e^{-0} = 1+1 = 2$

$\left[\begin{array}{l} e^x-1 \xrightarrow{x\to 0} e^0-1 = 1-1 = 0 \text{ donc } (e^x-1)^2 \xrightarrow{x\to 0} 0 \\ |x|\ln|x| \xrightarrow{x\to 0} \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \end{array}\right.$ (par croissance comparée)

$(e^x-1)^2-|x|\ln|x| \xrightarrow{x\to 0} 0$

Donc forme indéterminée « $\dfrac{2}{0}$ ».

Pour lever l'indétermination, étudions le signe du dénominateur.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$(e^x-1)^2 \geq 0$

$|x|\ln|x| < 0$ si $|x|<1$ (car $|x|>0$ et $\ln|x|<0$)

car $|x| \in]0;1[$ et $\ln$ est strict. négative sur $]0;1[$.

Donc pour tout $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$,

$(e^x-1)^2-|x|\ln|x| > 0$.

Donc $(e^x-1)^2-|x|\ln|x| \xrightarrow{x\to 0} 0^+$.

et $\dfrac{1+e^{-x}}{(e^x-1)^2-|x|\ln|x|} \longrightarrow$ « $\dfrac{2}{0^+}$ » $\boxed{= +\infty}$.

Exercice 3.12 :
Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

Rq sur (b) :
$2^{1/x} \xrightarrow{x\to+\infty} 2^0 = 1$

On ne peut pas dire que $x^{1/x} \xrightarrow{x\to+\infty}$ « x^0 » $= 1$

$\xrightarrow{x\to+\infty}$ « $(+\infty)^{1/x}$ » $= +\infty$

« $(+\infty)^0$ » forme indéterminée

Ex $(e^x)^{1/x} = e^{x\cdot\frac{1}{x}} = e$

$$x^{\frac{1}{x}}; \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\ln(x) + xe^{-x} - e^x}{e^x + 1}; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{e^x - \ln(x)}{xe^x - x^2}; \qquad \text{(c)}$$

$$\arctan\left(\frac{\ln(e^x) + 1}{x^2}\right). \qquad \text{(d)}$$

(b) $x^{1/x}$ quand $x \to +\infty$?

$\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ donc forme indéterminée « $(+\infty)^0$ ».

Pour tout $x > 0$, $x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$.

$\frac{1}{x}\ln(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (par croissance comparée)

Comme exp est continue,

$\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) \xrightarrow{x\to 0} \exp(0) \boxed{= 1}$.

(a) $\dfrac{\ln(x) + xe^{-x} - e^x}{e^x + 1}$ quand $x \to +\infty$?

$e^x + 1 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

$\ln(x) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

$x e^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ (par croissance comparée)

$e^{x} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

$\ln(x) + x e^{-x} - e^{x}$ est une forme indéterminée « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

Mettons en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln(x) + x e^{-x} - e^{x}}{e^{x}+1} = \frac{e^{x}\left(e^{-x}\ln(x) + x e^{-2x} - 1\right)}{e^{x}\left(1 + e^{-x}\right)}$$

$$= \frac{e^{-x}\ln(x) + x e^{-2x} - 1}{1 + e^{-x}}$$

$e^{-x}\ln(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$x e^{-2x} \xrightarrow{x\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

par croissance comparée

$e^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$$\frac{e^{-x}\ln(x) + x e^{-2x} - 1}{1 + e^{-x}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{0 + 0 - 1}{1 + 0} = \frac{-1}{1} \boxed{= -1}.$$

(c) $\dfrac{e^{x} - \ln(x)}{x e^{x} - x^{2}}$ quand $x \to +\infty$?

$e^{x} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

« $e^{x} - \ln(x)$ » est une forme indéterminée « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

$$x e^{x} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$
$$x^2 \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

Le dénominateur est aussi une forme indéterminée « $(+\infty)-(+\infty)$ ».

Mettons en facteur le terme dominant :

$$\forall x>0, \quad \frac{e^{x}-\ln(x)}{xe^{x}-x^2} = \frac{e^{x}(1-e^{-x}\ln(x))}{xe^{x}(1-e^{-x}x)}$$
$$= \frac{1}{x}\times\frac{1-e^{-x}\ln(x)}{1-e^{-x}x}$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

$$e^{-x}\ln(x) \xrightarrow{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$
$$e^{-x}x \xrightarrow{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

par croissance comparée

$$\frac{1}{x}\times\frac{1-e^{-x}\ln(x)}{1-e^{-x}x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0\times\frac{1-0}{1-0} = 0\times 1 \boxed{= 0}$$

(d) $\arctan\left(\frac{\ln(e^{x})+1}{x^2}\right)$ quand $x\to+\infty$?

Étudions d'abord $\frac{\ln(e^{x})+1}{x^2}$ quand $x\to+\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, ou $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$$\frac{\ln(e^{x})+1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$
$$= \frac{x(1+1/x)}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x\to+\infty} 0\times(1+0) = 0.$$

arctan est continue donc par composition,

$$\arctan\left(\frac{\ln(e^x)+1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \to +\infty} \arctan(0) \boxed{= 0.}$$

À faire pour vendredi (pour tout le monde) :

Lisez la partie du cours sur la dérivabilité, c'est-à-dire les sections 3.1, 3.2 et 3.3 du chapitre 3 du poly.
Si vous avez le temps de faire les exercices inclus dans ces paragraphes, cela vous aidera à assimiler le cours. Ce n'est néanmoins pas prioritaire.
Si vous ne vous sentez pas à l'aise avec les calculs de limites, regardez les vidéos 1 et 2 du chapitre 3.

Vendredi matin, contrôle continu pour le groupe A.

À faire vendredi matin pour le groupe B :

- Regardez les vidéos 3 et 4 du chapitre 3, qui portent sur la dérivation.
- Faites les exercices 3.18 (a et e), 3.19 (a et f), 3.20 (a, c, e, f) et 3.23.
- Une fois que vous avez fait ces exercices (et pas avant), regardez les corrigés ; assurez-vous que vous avez bien compris vos éventuelles erreurs et que vous sauriez refaire ces exercices sans aide.
- Notez au fur et à mesure vos questions afin de pouvoir me les poser par mail ou le vendredi suivant.