Corrigé de l'exercice 1.32

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}^+$ quelconques.

(a) **Montrons que $\boldsymbol{x \leq |x|}$.**

- Premier cas : $x \geq 0$. Alors $|x| = x$ donc $|x| \geq x$.
- Deuxième cas : $x < 0$. Alors $|x| = -x > 0 > x$ donc $|x| \geq x$.

(b) **Montrons que $\boldsymbol{(|x| = 0) \iff (x = 0)}$.**

- Montrons que $(|x| = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
  Raisonnons par contrapposée et supposons $x \neq 0$. Le réel x est alors soit strictement positif, soit strictement négatif.
  Si $x > 0$, $|x| = x > 0$ donc $|x| \neq 0$.
  Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$ donc $|x| \neq 0$.
  Dans tous les cas, on a $|x| \neq 0$.
- Montrons que $(x = 0) \Rightarrow (|x| = 0)$.
  Supposons $x = 0$. D'après la définition de la valeur absolue, $|x| = x = 0$.

(c) **Montrons que $\boldsymbol{|xy| = |x||y|}$.**

- Premier cas : $x = 0$.
  Puisque $xy = 0$, $|xy| = 0$. De plus, $|x| = 0$ donc $|xy| = 0 = |x||y|$.
- Deuxième cas : $x \neq 0$ et $y = 0$.
  Puisque $xy = 0$, $|xy| = 0$. De plus, $|y| = 0$ donc $|xy| = 0 = |x||y|$.
- Troisième cas : $x > 0$ et $y > 0$.
  Dans ce cas, $xy > 0$ donc $|xy| = xy = |x||y|$.
- Quatrième cas : $x > 0$ et $y < 0$.
  Dans ce cas, $xy < 0$ donc $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

- Cinquième cas : $x < 0$ et $y > 0$.
  Dans ce cas, $xy < 0$ donc $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.
- Sixième cas : $x < 0$ et $y < 0$.
  Dans ce cas, $xy > 0$ donc $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

(d) **Montrons que $(|x| \leq z) \iff -z \leq x \leq z$.**

- Montrons que $(|x| \leq z) \Rightarrow (-z \leq x \leq z)$.
  Supposons $|x| \leq z$. D'après la propriété (a), $x \leq |x|$ et $-x \leq |-x| = |x|$, ce qui entraîne que $-|x| \leq x$. Ainsi,

$$-z \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq z.$$

  Donc $-z \leq x \leq z$.
- Montrons que $(-z \leq x \leq z) \Rightarrow (|x| \leq z)$.
  Supposons $-z \leq x \leq z$.
  Si $x \geq 0$, $|x| = x \leq z$.
  Si $x < 0$, $|x| = -x$. De plus, comme $-z \leq x$, on a $-x \leq z$ donc $|x| \leq z$.
  Dans tous les cas, on a bien $|x| \leq z$.