Corrigé de l'exercice 3.18

Irène Waldspurger

(waldspurger@ceremade.dauphine.fr)

Exercice 3.18

Donner le domaine de définition et de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f_a : x \to \cos(x)e^x$;

(b) $f_b : x \to \sin(x)\arctan(x)$;

(c) $f_c : x \to x^2 \sin(x)$;

(d) $f_d : x \to \tan(x)e^{-x}$;

(e) $f_e : x \to \arccos(x)\sqrt{x}$;

(f) $f_f : x \to x^{1/3}\ln(x)$.

Correction

[Remarque : ce corrigé est volontairement très détaillé. Vous pouvez adopter une rédaction plus concise ; attention néanmoins à n'omettre aucun argument.]

(a) La fonction f_a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \cos'(x)\exp(x) + \cos(x)\exp'(x) \\ &= (\cos(x) - \sin(x))e^x. \end{aligned}$$

(b) La fonction f_b est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_b'(x) &= \sin'(x)\arctan(x) + \sin(x)\arctan'(x) \\ &= \cos(x)\arctan(x) + \frac{\sin(x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(c) La fonction f_c est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_c'(x) &= (y \to y^2)'(x)\sin(x) + x^2 \sin'(x) \\ &= 2x\sin(x) + x^2\cos(x) \\ &= x(2\sin(x) + x\cos(x)). \end{aligned}$$

(d) La fonction $x \to e^{-x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la composée de la fonction exp et de la fonction $(x \to -x)$, toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$). La fonction tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Par produit, la fonction f_d est donc définie et dérivable sur

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\begin{aligned} f_d'(x) &= \tan'(x)e^{-x} + \tan(x)(y \to e^{-y})'(x) \\ &= (1 + \tan^2(x))e^{-x} + \tan(x)(-e^{-x}) \\ &= (1 - \tan(x) + \tan^2(x))e^{-x}. \end{aligned}$$

(e) La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et la fonction $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f_e est donc définie sur l'intersection de ces deux ensembles, c'est-à-dire sur $[0;1]$.

La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et la fonction $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après les résultats généraux sur la dérivabilité des produits, la fonction f_e est dérivable sur l'intersection de ces deux ensembles, c'est-à-dire sur $]0;1[$.

Pour montrer que le domaine de dérivabilité est exactement $]0;1[$, il faut montrer que f_e n'est dérivable ni en 0 ni en 1. [1]

La fonction f_e n'est pas dérivable en 0 car son taux d'accroissement entre 0 et x n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 0^+ :

$$\begin{aligned} \frac{f_e(x) - f_e(0)}{x} &= \frac{\arccos(x)\sqrt{x} - 0}{x} \\ &= \frac{\arccos(x)}{\sqrt{x}} \\ &\xrightarrow{x \to 0^+} \ll \frac{\arccos(0)}{0^+} \gg = \ll \frac{\pi/2}{0^+} \gg = +\infty. \end{aligned}$$

1. Attention : le théorème sur la dérivation d'un produit ne permet pas de dire que f_e est dérivable en 0 ou en 1 mais il ne permet pas non plus de dire qu'elle n'est pas dérivable en 0 ou en 1. Démontrer cela demande un argument différent.

Montrons que la fonction f_e n'est pas non plus dérivable en 1. Remarquons que, pour tout $x \in]0;1]$,

$$\arccos(x) = \frac{f_e(x)}{\sqrt{x}}.$$

La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable en 1 et ne s'y annule pas. Ainsi, si f_e était dérivable en 1, arccos serait dérivable en 1, comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Or arccos n'est pas dérivable en 1 (c'est une propriété du cours). Donc f_e n'est pas dérivable en 1.
Ainsi, le domaine de dérivabilité de f_e est $]0;1[$.
Pour tout $x \in]0;1[$,

$$\begin{aligned} f_e'(x) &= \arccos'(x)\sqrt{x} + \arccos(x)\sqrt{\cdot}'(x) \\ &= -\sqrt{\frac{x}{1-x^2}} + \frac{\arccos(x)}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(f) La fonction $x \to x^{1/3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \to x^{1/3}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit, f_f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_f(x) &= (y \to y^{1/3})'(x)\ln(x) + x^{1/3}\ln'(x) \\ &= \frac{\ln(x)}{3x^{2/3}} + \frac{x^{1/3}}{x} \\ &= \frac{1}{x^{2/3}}\left(\frac{\ln(x)}{3} + 1\right). \end{aligned}$$