Corrigé de l'exercice 3.19

Irène Waldspurger

(waldspurger@ceremade.dauphine.fr)

Exercice 3.19

Donner le domaine de définition et de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f_a : x \to \frac{x-2}{x+1}$;

(b) $f_b : x \to \frac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$;

(c) $f_c : x \to \frac{\cos(x)}{x+1}$;

(d) $f_d : x \to \frac{x}{e^x-2}$;

(e) $f_e : x \to \frac{\arcsin(x)}{x^2-2x+2}$;

(f) $f_f : x \to \frac{e^x}{x^4+2x^2+1}$.

Correction

(a) La fonction f_a est définie et dérivable en tous les points où son dénominateur ne s'annule pas, comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

(b) Remarquons d'abord que le dénominateur de f_b vaut $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$. Il s'annule seulement en $x=-1$ donc f_b est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$f_b(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} = (x-1)^2(x+1)^{-3}.$$

Notons

$$f_{b,1} : x \in \mathbb{R} \to (x-1)^2;$$
$$f_{b,2} : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to (x+1)^{-3}.$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur tout leur ensemble de définition, puisqu'elles sont composées de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition : $f_{b,1}$ est la composée de $(x \to x-1)$ et $(x \to x^2)$ et $f_{b,2}$ de $(x \to x+1)$ et $(x \to x^{-3})$. Leur dérivée se calcule à l'aide de la formule de dérivation des composées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'_{b,1}(x) = 2(x-1);$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \qquad f'_{b,2}(x) = (-3)(x+1)^{-4}.$$

Comme produit de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, f_b est donc dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\begin{aligned} f'_b(x) &= f'_{b,1}(x)f_{b,2}(x) + f_{b,1}(x)f'_{b,2}(x) \\ &= 2(x-1)(x+1)^{-3} - 3(x-1)^2(x+1)^{-4} \\ &= \frac{(x-1)\left(2(x+1) - 3(x-1)\right)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x-1)(5-x)}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

(c) La fonction f_c est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie et dérivable en tous les points où son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
D'après la formule de dérivation d'un quotient, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,

$$\begin{aligned} f'_c(x) &= \frac{\cos'(x)(x+1) - \cos(x) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-(x+1)\sin(x) - \cos(x)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

(d) La fonction f_d est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc définie et dérivable en tous les points où son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(2)\}$.

D'après la formule de dérivation d'un quotient, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\ln(2)\}$,

$$\begin{aligned} f_d'(x) &= \frac{1 \times (e^x - 2) - xe^x}{(e^x-2)^2} \\ &= \frac{-xe^x + e^x - 2}{(e^x-2)^2}. \end{aligned}$$

(e) Remarquons tout d'abord que le dénominateur de f_e vaut $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 + 1 \geq 1$ donc le dénominateur ne s'annule jamais. [1]
Ainsi, f_e est le quotient d'une fonction définie sur $[-1;1]$ et d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas ; f_e est définie sur $[-1;1]$.
Puisque arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et $(x \to x^2 - 2x + 2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, f_e est dérivable sur $]-1;1[$, par quotient. Pour en déduire que son domaine de dérivabilité est exactement $]-1;1[$, il faut montrer qu'elle n'est dérivable ni en -1 ni en 1. [2]
Pour tout $x \in [-1;1]$,

$$\arcsin(x) = f_e(x)(x^2 - 2x + 2).$$

Ainsi, si f_e était dérivable en -1 (ou en 1), arcsin serait dérivable en -1 (ou en 1), comme produit de deux fonctions dérivables en -1 (ou en 1). Or arcsin n'est pas dérivable en -1 (ni en 1) ; f_e ne l'est donc pas non plus.
Ainsi, le domaine de dérivabilité de f_e est $]-1;1[$.
Pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} f_e'(x) &= \frac{\arcsin'(x)(x^2-2x+2) - \arcsin(x)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2-2x+2}{\sqrt{1-x^2}} - 2(x-1)\arcsin(x)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{(x-1)\arcsin(x)}{(x^2-2x+2)^2}. \end{aligned}$$

(f) Remarquons tout d'abord que le dénominateur de f_f est $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$. Comme $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1. On pouvait aussi le voir en calculant le discriminant du polynôme $X^2 - 2X + 2$.
2. Ce raisonnement est assez semblable à celui de la question e) de l'exercice 3.18.

Ainsi, f_f est un quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas ; elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned}
f_f'(x) &= \frac{e^x(x^4 + 2x^2 + 1) - e^x(4x^3 + 4x)}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1)e^x}{(x^2 + 1)^4}.
\end{aligned}$$