Corrigé de l'exercice 3.25

Irène Waldspurger

(waldspurger@ceremade.dauphine.fr)

Notons $f : x \to \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$ la fonction à étudier.

Ensemble de définition et continuité

Pour que f soit bien définie en un réel x, il faut et il suffit que $x - 1 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $x \geq 1$. La fonction est donc définie sur

$$[1; +\infty[.$$

Elle est de plus continue sur cet intervalle car différence de composées de fonctions continues.

Parité / périodicité

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, le réel $-x$ est négatif ; $f(-x)$ n'est donc pas bien défini. Ainsi, f ne peut être ni paire ni impaire. Elle ne semble pas non plus périodique.

Dérivabilité

La fonction $(x \to x-1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \to \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $x \to \sqrt{x-1}$ est donc dérivable en tout point x tel que $x-1$ appartient à $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire tel que $x \in]1; +\infty[$. La fonction $(x \to \sqrt{x-1})$ est donc dérivable sur $]1; +\infty[$.

De même, la fonction $(x \to \sqrt{x+1})$ est dérivable sur $]-1; +\infty[$.

Comme différence de ces deux fonctions, f est dérivable sur l'intersection de $]1; +\infty[$ et $]-1; +\infty[$, c'est-à-dire $]1; +\infty[$.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Calculons son taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ pour un $h>0$ quelconque :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\sqrt{h}-\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} - \left(\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\right).\end{aligned}$$

Dans la fraction $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$, on reconnaît le taux d'accroissement entre 2 et $2+h$ de la fonction racine carrée. Puisque la racine est dérivable en 2, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, on peut dire que

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \xrightarrow{h\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h\to 0^+} +\infty.$$

D'après les théorèmes usuels sur les limites de sommes,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \xrightarrow{h\to 0^+} +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en 1. Cela permet d'affirmer que le domaine de dérivabilité de f est

$$]1;+\infty[.$$

Calcul de la dérivée

Pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Sens de variation

Déterminons le signe de f' sur $]1;+\infty[$. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, on remarque que, puisque la racine carrée est une fonction strictement croissante,

$$\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}.$$

Ces deux nombres étant strictement positifs, on en déduit que, pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

et donc

$$f'(x) > 0.$$

La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$, dérivable sur $]1; +\infty[$ et de dérivée strictement positive : elle est strictement croissante. [1]

Limites

Pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sqrt{x-1} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{1a}$$

$$\sqrt{x+1} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{1b}$$

on a que

$$f(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, le graphe de f a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Limites de la dérivée

Les propriétés (1a) et (1b) entraînent que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus,

$$\sqrt{x-1} \overset{x \to 1^+}{\longrightarrow} 0^+, \sqrt{x+1} \overset{x \to 1^+}{\longrightarrow} \sqrt{2},$$

donc

$$f'(x) \overset{x \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier, le graphe de f a une tangente verticale au point d'abscisse 1.

1. On prend ici un peu d'avance sur le cours d'analyse 1, dans lequel ce résultat sera précisément énoncé et démontré.

Graphe