Corrigé de l'exercice 4.3

Irène Waldspurger

(waldspurger@ceremade.dauphine.fr)

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx &= \int_0^\pi \sin(x)\sin'(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^\pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) En bleu, on décrit un raisonnement qu'on peut faire au brouillon pour résoudre la question si on n'identifie pas directement la primitive de $x \to \frac{x}{x^2-1}$. Ce raisonnement n'a pas vocation à être décrit en détail dans une copie.

Suivant la suggestion donnée par l'énoncé, on veut reconnaître en "$\frac{x}{x^2-1}$" la dérivée d'une fonction composée, c'est-à-dire qu'on veut l'écrire sous la forme "$g'(x)f'(g(x))$" pour deux fonctions f et g bien choisies.

La fonction $x \to \frac{x}{x^2-1}$ s'écrit naturellement comme le produit de deux fonctions, $(x \to x)$ et $\left(x \to \frac{1}{x^2-1}\right)$. L'une de ces fonctions est-elle de la forme "$g'(x)$" pour g idéalement assez simple ? La réponse est oui : pour tout x, $x = g'(x)$ si on pose $g : x \to \frac{x^2}{2}$.

En fait, on va plutôt poser $g : x \to x^2$, pour que la fonction g soit la plus simple possible.

Il nous faut maintenant trouver f de telle sorte que, pour tout $x \in [2; 3]$,

$$\frac{x}{x^2-1} = g'(x)f'(g(x)) = 2xf'(x^2),$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in [2; 3]$,

$$\frac{1}{2(x^2-1)} = f'(x^2).$$

Ceci nous incite à chercher f telle que, pour tout y dans le domaine de dérivabilité de f,

$$f'(y) = \frac{1}{2(y-1)}.$$

Choissons par exemple $f : y \in]1;+\infty[\to \frac{1}{2}\ln(y-1)$.

Définissons $f : x \in]1;+\infty[\to \frac{1}{2}\ln(x-1)$ et $g : x \in \mathbb{R} \to x^2$. La fonction $f \circ g$ est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. Elle est donc dérivable sur son domaine de définition (dont on peut vérifier qu'il s'agit de $\mathbb{R}\backslash[-1;1]$) et, pour tout x dans ce domaine,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = 2xf'(x^2) = \frac{x}{x^2-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx &= [f \circ g]_2^3 \\ &= f(g(3)) - f(g(2)) \\ &= \frac{\ln(8)-\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

(c) Pour la même raison que dans la question précédente, on pose $g : x \to x^2$. On doit ensuite trouver f telle que, pour tout x,

$$\frac{x}{(x^2+1)^3} = g'(x)f'(g(x)) = 2xf'(x^2).$$

On cherche donc f telle que, pour tout x,

$$f'(x^2) = \frac{1}{2(x^2+1)^3}.$$

On va donc choisir pour f une primitive de $x \to \frac{1}{2(x+1)^3}$, par exemple $x \to \frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-2}}{(-2)} = -\frac{1}{4(x+1)^2}$.

Posons $f : x \to -\frac{1}{4(x+1)^2}$ et $g : x \to x^2$. Puisque f et g sont dérivables sur leur ensemble de définition, $f \circ g$ l'est aussi et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = \frac{x}{(x^2+1)^3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx &= [f \circ g(x)]_2^3 \\ &= \left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{400}+\frac{1}{100} \\ &= \frac{3}{400}.\end{aligned}$$

(d) Posons $f : x \to \frac{\sin(x)}{2}$ et $g : x \to x^2$. La fonction $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = x\cos(x^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x\cos(x^2)dx &= \left[\frac{\sin(x^2)}{2}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\sin(1)-\sin(1)}{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx &= \int_1^2 \ln'(x)\ln(x)dx \\ &= \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{\ln^2(2)}{2}.\end{aligned}$$

(f) La fonction à intégrer est $x \to x^2\frac{\sin(x^3)}{\cos(x^3)}$. Puisque $x \to x^2$ est la dérivée de $x \to \frac{x^3}{3}$, on pose $g : x \to x^3$ et on cherche f telle que, pour tout x,

$$x^2\frac{\sin(x^3)}{\cos(x^3)} = g'(x)f'(g(x)) = 3x^2 f'(x^3).$$

On cherche donc f telle que, pour tout x,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On reconnaît à nouveau dans $x \to \frac{1}{3}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ la dérivée d'une fonction composée.
En effet, pour tout x,

$$\frac{1}{3}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{3}\frac{\cos'(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{3}(\ln\circ\cos)'(x).$$

On peut donc poser $f = -\frac{1}{3}(\ln\circ\cos)$.
Posons $f : x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to -\frac{\ln(\cos(x))}{3}$ et $g : x \in \mathbb{R} \to x^3$. Pour tout $x \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= 3x^2\left(-\frac{\cos'(g(x))}{3\cos(g(x))}\right)\\ &= x^2\frac{\sin(x^3)}{\cos(x^3)}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2\frac{\sin(x^3)}{\cos(x^3)}dx &= \left[-\frac{\ln(\cos(x^3))}{3}\right]_{-1}^{1}\\ &= -\frac{\ln(\cos(1)) - \ln(\cos(-1))}{3}\\ &= -\frac{\ln(\cos(1)) - \ln(\cos(1))}{3}\\ &= 0.\end{aligned}$$