Corrigé de l'exercice 4.10.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de réels $(x_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$.

1. Prouver que $f(0) = 0$.
2. Montrer que $f'(0) = 0$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, on a $f^{(k)}(0) = 0$.
4. Qu'en est-il si on remplace l'hypothèse « $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante » par « $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante » ?

Introduction

- Le but de l'exercice est de démontrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, s'il existe une suite de points où f s'annule, qui soit de plus strictement monotone et tende vers 0, alors toutes les dérivées de f sont nulles en 0.
- La similarité principale avec l'exercice 4.10 est que, par hypothèse, la fonction f s'annule en un certain nombre de points. Partant de cette propriété, on va pouvoir utiliser le même raisonnement qu'à l'exercice 4.10 pour construire des points où f' s'annule. Cette méthode sera utile dans la question 2, puis dans la question 3 (appliquée dans la question 3 à $f^{(k)}$ au lieu de f, pour tout k dans $\mathbb{N}$).
- Une différence avec l'exercice 4.10 est qu'ici, le nombre de points où f s'annule est infini ; on va donc devoir manipuler des suites entières de points d'annulation. De plus, comme on souhaite démontrer un résultat portant sur toutes les dérivées successives de f, il faudra réappliquer la méthode dans le cadre d'un raisonnement par récurrence, ce qui n'était pas utile dans l'exercice 4.10.

Développement

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^\infty$). Elle est en particulier continue en 0. Par caractérisation séquentielle, puisque $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a donc

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Appliquons le lemme de Rolle à f sur le segment $[x_{n+1}; x_n]$ (on a bien $x_{n+1} < x_n$ car x est strictement décroissante). Les hypothèses du lemme sont vérifiées : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est en particulier continue sur $[x_{n+1}; x_n]$ et dérivable sur $]x_{n+1}; x_n[$. On peut donc affirmer qu'il existe $y_n \in]x_{n+1}; x_n[$ tel que $f'(y_n) = 0$.
Puisque ce raisonnement est valable pour $n \in \mathbb{N}$ *quelconque*, on en déduit qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n,

$$x_{n+1} < y_n < x_n;$$
$$f'(y_n) = 0.$$

Fixons une telle suite.
Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0 ; par encadrement, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0. Comme f' est continue en 0 (elle est continue sur $\mathbb{R}$), on a par caractérisation séquentielle :

$$f'(0) = \lim_{n\to+\infty} f'(y_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

3. Commençons par démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$(\mathcal{P}_k)$: il existe une suite de réels $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(y_n) = 0$.

L'initialisation est une conséquence de l'hypothèse de l'énoncé : pour $k = 0$, la suite $y = x$ vérifie toutes les propriétés requises.
Supposons maintenant que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et démontrons $(\mathcal{P}_{k+1})$.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les propriétés décrites dans $(\mathcal{P}_k)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On applique le lemme de Rolle à $f^{(k)}$ sur le segment $[y_{n+1}; y_n]$ (en remarquant que $y_{n+1} < y_n$ car y est décroissante). Les hypothèses du lemme sont vérifiées car $f^{(k)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le lemme garantit qu'il existe $z_n \in]y_{n+1}; y_n[$ tel que

$$f^{(k+1)}(z_n) = (f^{(k)})'(z_n) = 0.$$

Ce raisonnement étant valable pour n quelconque, on en déduit qu'il existe une suite de réels $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} < z_n < y_n;$$
$$f^{(k+1)}(z_n) = 0.$$

Montrons que z vérifie les propriétés décrites dans $(\mathcal{P}_{k+1})$. Tout d'abord, z est strictement décroissante, puisque, pour tout n, $z_{n+1} < y_{n+1} < z_n$. De plus, par encadrement, puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, z tend vers 0. Enfin, d'après notre définition de z, $f^{(k+1)}(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc démontré la propriété $(\mathcal{P}_{k+1})$. Cela termine le raisonnement par récurrence : $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Utilisons le résultat que nous venons de démontrer pour résoudre la question 3. Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Soit y une suite comme dans la propriété $(\mathcal{P}_k)$. Puisque $f^{(k)}$ est continue en 0 (elle est continue sur $\mathbb{R}$) et $y_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, le théorème de caractérisation séquentielle implique :

$$f^{(k)}(0) = \lim_{n\to+\infty} f^{(k)}(y_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

4. Si on suppose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et plus strictement décroissante, on peut appliquer un raisonnement identique, en remplaçant seulement les intervalles ≪ $[x_{n+1}; x_n]$ ≫ et ≪ $[y_{n+1}; y_n]$ ≫ par ≪ $[x_n; x_{n+1}]$ ≫ et ≪ $[y_n; y_{n+1}]$ ≫ et la propriété ≪ strictement décroissante ≫ de la définition de $(\mathcal{P}_k)$ par ≪ strictement croissante ≫. La conclusion reste donc vraie.

Conclusion

Si on pensait à utiliser le lemme de Rolle comme dans l'exercice 4.10, on avait compris au moins l'intuition du raisonnement à mener. Toutefois, rédiger correctement ce raisonnement nécessitait du soin, tout particulièrement dans la question 3 : il fallait en effet bien choisir l'hypothèse de récurrence. L'hypothèse de récurrence « $(\mathcal{P}_k) : f^{(k)} = 0$ » ne permettait pas de conclure, par exemple. Oublier, dans l'hypothèse de récurrence, la propriété « $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante » posait aussi problème.