Corrigé de l'exercice 4.10.ter

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de réels $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que :

- pour tout entier naturel n il existe un entier naturel $k_n \geq n$ tel que $u_{k_n} \neq 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(x_n) = 0$;
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)}(0) = 0$.

Introduction

- Le but de cet exercice est de démontrer que si une fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ et s'il existe une suite de points en lesquels f s'annule, qui converge vers 0 sans être stationnaire en 0, alors toutes les dérivées de f en 0 sont nulles.
- La propriété à démontrer est la même que dans l'exercice 4.10.bis à part que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus supposée strictement monotone mais seulement non stationnaire. On peut s'inspirer de l'exercice 4.10.bis de deux manières différentes :
  — on peut utiliser la même structure de raisonnement, basée sur le lemme de Rolle, en adaptant les détails pour tenir compte du fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas être monotone ;
  — on peut, à partir de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, essayer de construire une sous-suite qui vérifierait les hypothèses de l'exercice 4.10.bis et utiliser directement le résultat de cet exercice.
- La différence principale est l'absence d'hypothèse sur la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette hypothèse était importante dans la construction menée à l'exercice 4.10.bis : elle permettait de s'assurer qu'on appliquait toujours le lemme de Rolle sur des intervalles non-vides et permettait d'encadrer les suites construites par récurrence afin de démontrer leur convergence vers 0 par encadrement.

Développement (première solution)

On va démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_k)\quad \begin{array}{l}\text{Il existe une suite } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge vers 0, n'est pas stationnaire}\\ \text{en 0 et telle que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(y_n) = 0.\\ \text{De plus, } f^{(k)}(0) = 0.\end{array}$$

On initialise en démontrant $(\mathcal{P}_0)$. On définit $y = x$. D'après les hypothèses de l'énoncé, cette suite converge bien vers 0, n'est pas stationnaire en 0, et est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = 0$. Il reste à montrer que $f(0) = 0$.
La fonction f est continue en 0 (car $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). D'après le théorème de caractérisation séquentielle, on a donc

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ l'est aussi. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0, non-stationnaire en zéro, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_n) = 0$. Elle existe d'après l'hypothèse de récurrence. À partir de cette suite, on va construire $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés voulues au rang $k+1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\phi(n)$ le plus petit entier supérieur ou égal à n tel que $z_{\phi(n)} \neq 0$ (il existe car z n'est pas stationnaire en 0). Pour tout n, on peut appliquer le lemme de Rolle à $f^{(k)}$ sur le segment $[0; z_{\phi(n)}]$ (ou $[z_{\phi(n)}; 0]$ si $z_{\phi(n)} < 0$). En effet, $f^{(k)}(z_{\phi(n)}) = 0$ (d'après les propriétés de z) et $f^{(k)}(0) = 0$ (par l'hypothèse de récurrence). De plus, $f^{(k)}$ est continue et dérivable sur le segment car f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $y_n \in]0; z_{\phi(n)}[$ (ou $]z_{\phi(n}; 0[$) tel que

$$f^{(k+1)}(y_n) = 0.$$

Pour tout n, fixons un tel y_n.
La suite y ainsi définie vérifie bien les propriétés voulues : d'après notre construction, on a, pour tout n, $0 < |y_n| < |z_{\phi(n)}|$. La suite $(|z_{\phi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 car $(z_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de z et z tend vers 0. Ainsi, par encadrement, $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. De plus, notre construction assure que $y_n \neq 0$ pour tout n ; la suite y n'est donc pas stationnaire en 0. Enfin, par construction, $f^{(k+1)}(y_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour achever d'établir $(\mathcal{P}_{k+1})$, il suffit de montrer que $f^{(k+1)}(0) = 0$. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité et le fait que $f^{(k+1)}$ est continue en 0 :

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{n\to+\infty} f^{(k+1)}(y_n) = 0.$$

Ceci termine le raisonnement par récurrence. On en déduit que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Développement (deuxième solution)

On commence par montrer qu'il existe une sous-suite de x qui ne s'annule pas : pour tout n, soit $\phi(n)$ le plus petit entier supérieur ou égal à n tel que $x_{\phi(n)} \neq 0$ (il existe d'après les hypothèses de l'énoncé). Notons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite obtenue. D'après la construction de ϕ, elle ne s'annule pas.
On utilise maintenant le lemme du soleil levant : toute suite réelle admet une sous-suite monotone. Soit donc z une sous-suite monotone de y.

La suite z ne s'annule pas (puisque y ne s'annule pas). Comme c'est une sous-suite de y, et donc de x, elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = 0;$$
$$\lim_{n \to +\infty} z_n = 0.$$

Montrons maintenant qu'il existe une sous-suite de z strictement monotone. On traite séparément le cas où z est décroissante et celui où z est croissante.
Supposons d'abord z décroissante. Posons $\psi(0) = 0$. Ensuite, pour tout n, si on a défini $\psi(n)$, on définit $\psi(n+1)$ par

$$\psi(n+1) = \min\{k > \psi(n), z_k < z_{\psi(n)}\}.$$

Cette définition est valide car l'ensemble $\{k > \psi(n), z_k < z_{\psi(n)}\}$ est non-vide (sinon, puisque z est décroissante, on devrait avoir $z_k = z_{\psi(n)}$ pour tout $k > \psi(n)$, donc z serait stationnaire en $z_{\psi(n)}$ et donc $z_{\psi(n)}$ vaudrait 0 puisque z tend vers 0, ce qui est impossible car z ne s'annule pas) et est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$; il admet donc un minimum.
Cette définition produit une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, c'est-à-dire une extraction. D'après la construction de ψ, $(z_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
De même, si z est croissante, on définit une extraction ψ telle que $(z_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
La suite $(z_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (c'est une sous-suite de z) et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(z_{\psi(n)}) = 0.$$

De plus, elle est strictement monotone. D'après l'exercice 4.10.bis, on a donc $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion

Cet exercice était difficile. On pouvait le résoudre avec le même raisonnement qu'à l'exercice 4.10.bis (première solution proposée) mais il fallait bien choisir les intervalles sur lesquels appliquer le lemme de Rolle (sinon, on risquait d'appliquer Rolle sur des intervalles vides ou de s'en servir pour construire une suite stationnaire en 0). Penser au lemme du soleil levant (deuxième solution proposée) permettait de simplifier le raisonnement mais, là encore, il fallait faire preuve de soin. En particulier, si on ne commençait pas par extraire de x une sous-suite ne s'annulant pas, on risquait, après application du lemme, d'obtenir une sous-suite stationnaire en 0 et de ne pas pouvoir conclure.