Corrigé de l'exercice 4.13.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

1. Soit l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
   (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour g en $x_0 = 0$.
   (b) En déduire la position par rapport au graphe de g de la tangente à ce graphe au point $x = 0$.
2. Soit l'application h définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$h(x) = \ln^2(1+x).$$
   (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour h en $x_0 = 0$.
   (b) En déduire la position par rapport au graphe de h de la tangente à ce graphe au point $x = 0$.
3. On considère la fonction f définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)}.$$
   Déduire des questions précédentes que f admet une limite lorsque x tend vers 0.

Introduction

- Le but de cet exercice est d'écrire la formule de Taylor-Young en 0, à l'ordre 3, pour deux fonctions, et de s'en servir pour deux applications : déterminer la position relative des graphes de ces fonctions et de leur tangente en 0 et calculer la limite en 0 d'une troisième fonction, s'exprimant à partir des deux premières.
- À part pour le détail des calculs, les questions 1 et 2 sont identiques à l'exercice 4.13 ; le raisonnement et, à quelques détails près, la rédaction seront les mêmes.
- La question 3, en revanche, n'a pas de lien avec l'exercice 4.13 ; elle se résout indépendemment.

Développement

1. a) La fonction g est un quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car une exponentielle est toujours strictement positive). Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^3$ et on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young en 0, à l'ordre 3.
Avant d'appliquer la formule, calculons les dérivées de g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2};$$

$$g''(x) = 4(e^x - e^{-x}).\frac{(-2)}{(e^x + e^{-x})^3} = \frac{-8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3};$$

$$g'''(x) = -8\left(\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3} - 3\frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4}\right) = -8\left(\frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} - 3\frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4}\right).$$

(L'expression de g' a été obtenue par la formule de dérivation des quotients, celle de g'' par la formule de dérivation des composées, appliquée à la composée de $\left(x \to \frac{4}{x^2}\right)$ et $(x \to e^x + e^{-x})$, et celle de g''' par la formule de dérivation des produits, appliquée au produit de $(x \to e^x - e^{-x})$ et $\left(x \to \frac{1}{(e^x+e^{-x})^3}\right)$.)
On en déduit

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) = -2.$$

La formule de Taylor-Young affirme alors qu'il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$\epsilon(x) \overset{x\to 0}{\to} 0$$

et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + \frac{x^3}{6}g'''(0) + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

b) L'équation de la tangente au graphe de g en 0 est

$$y = g(0) + xg'(0) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le graphe de g est au-dessus de la tangente au point d'abscisse x si et seulement si

$$\begin{aligned} & g(x) - x \geq 0 \\ \iff & -\frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \geq 0 \\ \iff & x^3\left(-\frac{1}{3} + \epsilon(x)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Puisque $\epsilon \overset{0}{\to} 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\eta; \eta[$, $|\epsilon(x)| < \frac{1}{6}$. Fixons un tel η. Pour tout $x \in]-\eta; \eta[$,

$$-\frac{1}{3} + \epsilon(x) \leq -\frac{1}{3} + |\epsilon(x)| < -\frac{1}{6} < 0$$

donc $x^3\left(-\frac{1}{3} + \epsilon(x)\right)$ est du signe opposé à celui de x^3, c'est-à-dire que $x^3\left(-\frac{1}{3} + \epsilon(x)\right)$ est positif lorsque $x \leq 0$ et négatif si $x \geq 0$.

Ainsi, le graphe de g est au-dessus de la tangente à gauche de 0 et en-dessous à droite.

2. a) La fonction $x \to 1 + x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty[$ et à images dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \to x^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction h est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty[$. En particulier, elle est $\mathcal{C}^3$ et on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young en 0, à l'ordre 3.

Calculons d'abord les dérivées de h. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$,

$$h'(x) = 2\frac{\ln(1+x)}{1+x};$$

$$h''(x) = 2\frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2};$$

$$h'''(x) = 2\left(-\frac{1}{(1+x)^3} - 2\frac{(1 - \ln(1+x))}{(1+x)^3}\right) = \frac{2(2\ln(1+x) - 3)}{(1+x)^3}.$$

En conséquent,

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(0) = 2, \quad h'''(0) = -6.$$

D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction $\tilde{\epsilon} :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\tilde{\epsilon}(x) \overset{x \to 0}{\to} 0$$

et telle que, pour tout $x \in]-1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + xh'(0) + \frac{x^2}{2}h''(0) + \frac{x^3}{6}h'''(0) + x^3\tilde{\epsilon}(x) \\ &= x^2 - x^3 + x^3\tilde{\epsilon}(x). \end{aligned}$$

b) L'équation de la tangente au graphe en 0 est

$$y = h(0) + xh'(0) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1; +\infty[$, le graphe de h est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x si et seulement si

$$\begin{aligned} & h(x) \geq 0 \\ \iff & x^2 - x^3 + x^3\tilde{\epsilon}(x) \geq 0 \\ \iff & x^2(1 - x + x\tilde{\epsilon}(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

La fonction $x \to 1 - x + x\tilde{\epsilon}(x)$ tend vers 1 en 0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\eta; \eta[$, $1 - x + x\tilde{\epsilon}(x) > 0$. Fixons un tel η.

Pour tout $x \in]-\eta;\eta[$, $x^2(1-x+x\tilde{\epsilon}(x))$ est du signe de x^2, c'est-à-dire positif. Le graphe de h est donc au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3. Notons $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{\epsilon} :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions comme dans les formules de Taylor-Young des questions 1.a) et 2.a). Pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(x)-x^2}{x-g(x)} \\ &= \frac{-x^3+x^3\tilde{\epsilon}(x)}{\frac{x^3}{3}-x^3\epsilon(x)} \\ &= \frac{-1+\tilde{\epsilon}(x)}{\frac{1}{3}-\epsilon(x)}. \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\epsilon}$ et ϵ tendent vers 0 en 0, les règles usuelles sur les sommes et quotients de limites nous disent que

$$f(x) \overset{x\to 0}{\to} \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Conclusion

Reprendre fidèlement le raisonnement de l'exercice 4.13 permettait effectivement de résoudre les questions 1 et 2 ; la question 3 était une application relativement directe des deux formules de Taylor-Young établies précédemment. Il fallait toutefois faire preuve de soin du point de vue de la rédaction, ne pas oublier les nombreux « pour tout x » et énoncer correctement le théorème de Taylor-Young, en n'oubliant pas de préciser pourquoi ses hypothèses sont vérifiées par nos fonctions g et h.