# Corrigé de l'exercice 4.16.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

## Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$. On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq n!C^n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un nombre réel $c_{x,n}$ strictement compris entre 0 et $x$ tel que
$$f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}).$$
2. Montrer que pour tout $x \in ]-1/C; 1/C[$ on a $f(x) = 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1/C; 1/C]$ et tout entier naturel $n$ on a $f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $k$ et tout $x \in \left[\frac{k-1}{C}; \frac{k+1}{C}\right]$ on a $f(x) = 0$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 0$.

## Introduction

- Dans cet exercice, on considère une fonction $f$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées sont nulles en 0. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $n$, $|f^{(n)}|$ est bornée par $n!C^n$. L'objectif est de montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$.
- Nous avons démontré le résultat demandé à la question 1 au cours du raisonnement que nous avons fait pour résoudre la question 3 de l'exercice 4.16 (au détail près que, dans l'exercice 4.16, les dérivées de $f$ s'annulaient en un réel $a$ quelconque alors qu'ici, elles s'annulent en 0). Pour la question 1, nous pourrons donc réutiliser le raisonnement de l'exercice 4.16.

  La question 2 est de principe similaire aux questions 3 et 4 de l'exercice 4.16 : il s'agit de combiner l'égalité démontrée via Taylor-Lagrange et les hypothèses de l'énoncé afin d'obtenir un ensemble de majorations pour $|f|$, paramétrées par un entier $n$, puis de montrer que les majorations trouvées tendent vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, et d'en déduire que $f$ est nulle.
- L'hypothèse sur les $|f^{(n)}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est différente de celle de l'exercice 4.16, ce qui fait qu'on trouvera pour $|f|$ un ensemble différent de majorations. L'étude de la convergence vers 0 des majorations sera donc différente et ne permettra pas de montrer directement que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. On devra dans un premier temps se contenter de montrer que $f$ est

nulle sur $]-1/C;1/C[$, et puis trouver un argument pour étendre ce résultat à $\mathbb{R}$ (questions 3 à 5).

**Développement**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$, on pose $c_{x,n} = 0$ et on a bien

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &= \frac{0^n}{n!}.0 \\ &= \frac{0^n}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{0^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}). \end{aligned}$$

Supposons maintenant $x \neq 0$. La fonction $f$ est $n$ fois dérivable (car $\mathcal{C}^\infty$). On peut donc lui appliquer le théorème de Taylor-Lagrange entre 0 et $x$, à l'ordre $n-1$ : il existe $c_{x,n}$ strictement compris entre 0 et $x$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(c_{x,n})}{n!} x^n \\ &= \frac{f^{(n)}(c_{x,n})}{n!} x^n. \end{aligned}$$

(Dans la deuxième égalité, on utilise l'hypothèse selon laquelle toutes les dérivées de $f$ en 0 sont nulles.)

2. Soit $x \in ]-1/C;1/C[$ quelconque. Montrons que $f(x) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe un réel $c_{x,n}$ vérifiant les propriétés de la question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c_{x,n}) \right| \\ &= \frac{|x|^n}{n!} \left| f^{(n)}(c_{x,n}) \right| \\ &\leq \frac{|x|^n}{n!} (n! C^n) \\ &= (C|x|)^n. \end{aligned}$$

Puisque $x \in ]-1/C;1/C[$, on a $0 \leq C|x| < 1$ et donc

$$(C|x|)^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la suite constante $(|f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|f(x)|$.
En passant à la limite l'inégalité précédente, on obtient :

$$|f(x)| \leq 0.$$

Une valeur absolue étant toujours positive, cela signifie que $|f(x)| = 0$ et donc que $f(x) = 0$.

3. Dans la question 2., nous avons vu que, sur l'intervalle ouvert $]-1/C;1/C[$, la fonction $f$ était égale à la fonction nulle. Ses dérivées successives coïncident donc, sur $]-1/C;1/C[$, avec les dérivées successives de la fonction nulle, c'est-à-dire qu'elles sont nulles. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1/C;1/C[, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $f$ est $\mathcal{C}^\infty$),

$$f^{(n)}(-1/C) = \lim_{x \to -1/C^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to -1/C^+} 0 = 0$$

et

$$f^{(n)}(1/C) = \lim_{x \to 1/C^-} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 1/C^-} 0 = 0.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1/C;1/C], \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

4. On démontre par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$(P_k) : \text{pour tout } x \in \left[\tfrac{k-1}{C};\tfrac{k+1}{C}\right] \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0.$$

Initialisation : la propriété $(P_0)$ est le résultat démontré à la question 3.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $(P_k)$ est vérifiée et montrons que $(P_{k+1})$ l'est aussi.
Définissons

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f\left(x + \frac{k+1}{C}\right) \end{array}.$$

On va appliquer à la fonction $g$ le résultat que nous avons démontré pour $f$ à la question 3. ; pour cela, il faut montrer que $g$ vérifie les mêmes propriétés que $f$, c'est-à-dire :

1. $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$ ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|g^{(n)}(x)| \leq n!C^n.$$

La propriété 1. est une conséquence du fait que $g$ est la composée de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $f$ et $\left(x \to x + \frac{k+1}{C}\right)$.
La propriété 2. est la plus délicate. On remarque tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n$-ième de $g$ vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{k+1}{C}\right).$$

En particulier, pour tout $n$,

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{k+1}{C}\right).$$

D'après la propriété de récurrence $(P_k)$, $f^{(n)}\left(\frac{k+1}{C}\right) = 0$ pour tout $n$. Donc $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n$.

La propriété 3. est vraie aussi : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(x)| &= \left| f^{(n)}\left(x + \frac{k+1}{C}\right) \right| \\ &\leq n! C^n. \end{aligned}$$

En conséquent, la fonction $g$ vérifie le résultat démontré pour $f$ à la question 3. :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{C}; \frac{1}{C}\right], \forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \left[\frac{(k+1)-1}{C}; \frac{(k+1)+1}{C}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}\left(x - \frac{k+1}{C}\right) = 0$$

puisque $x - \frac{k+1}{C}$ appartient à $\left[-\frac{1}{C}; \frac{1}{C}\right]$.
Donc, pour tout $x \in \left[\frac{(k+1)-1}{C}; \frac{(k+1)+1}{C}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}\left(x - \frac{k+1}{C}\right) = 0.$$

La propriété $(P_{k+1})$ est donc vraie.
Conclusion : La propriété $(P_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k$, si on l'applique pour $n = 0$, on obtient le résultat demandé.

5. Dans la question précédente, nous avons démontré que, si une fonction $f$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, elle est nulle sur

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{k-1}{C}; \frac{k+1}{C}\right] = \left[-\frac{1}{C}; +\infty\right[.$$

Appliquons ce résultat à la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(-x). \end{array}$$

Elle vérifie les mêmes hypothèses que $f$ :

1. Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$h^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x).$$

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(0) = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|h^{(n)}(x)| = |f^{(n)}(-x)| \leq n! C^n.$$

Donc, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{C};+\infty\right[$,

$$g(x) = 0.$$

En conséquent, pour tout $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{C}\right[$, puisque $-x$ est dans $\left[-\frac{1}{C};+\infty\right[$, on a que

$$f(x) = g(-x) = 0.$$

Nous avons donc démontré que $f$ était nulle sur $\left]-\infty;-\frac{1}{C}\right[$. En combinant cela avec le fait qu'elle est nulle sur $\left[-\frac{1}{C};+\infty\right[$, on voit qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$.

**Conclusion**

Les questions 1. et 2. étaient proches de l'exercice précédent, les trois suivantes plus délicates. Les questions 4. et 5. pouvaient se résoudre de deux manières, soit en réappliquant explicitement le raisonnement des questions 1. et 2., soit en définissant des fonctions intermédiaires ($g$ et $h$ dans ce corrigé). Dans tous les cas, il fallait faire preuve de soin et ne pas oublier, notamment, de justifier l'annulation de toutes les dérivées de $f$ en $\frac{k+1}{C}$ dans la question 4.