Corrigé de l'exercice 4.18.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

1. DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de la fonction $f : x \to (\ln(1+x))^2$?

Cette fonction est le produit de $(x \to \ln(1+x))$ avec elle-même. On va donc utiliser les règles de calcul des produits de DL.

[On peut aussi voir f comme la composée des fonctions $(x \to x^2)$ et $x \to \ln(1+x)$ mais il est plus simple de calculer un produit de DL qu'une composée de DL.]

On sait qu'il existe une fonction $\epsilon_1 :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_1 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x).$$

On en déduit qu'il existe $\epsilon_2 :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_2 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)\right)^2 \\ &= x^2 - x^3 + x^3\epsilon_2(x). \end{aligned}$$

[On aurait pu écrire chacun des dix termes du carré puis une expression explicite pour ϵ_2 mais ce n'était pas utile. Ici, j'ai directement « incorporé dans le reste » tous les termes de degré strictement supérieur à 3 obtenus en développant le carré.]

2. DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de la fonction $f : x \to \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$?

On peut écrire f comme une composée : $f = g \circ h$ avec $g = h = \left(x \to \sqrt{1+x}\right)$. Pour obtenir le DL de f en $x_0 = 0$ à l'ordre 3, il faut composer le DL de h en $x_0 = 0$ et celui de g en $h(x_0) = 1$.

[Attention à bien utiliser le DL de h en 1 et pas en 0 !]

Le DL de h en 0 à l'ordre 3 est donné page 36 du poly : il existe ϵ_1 telle que $\epsilon_1 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x > -1$,

$$h(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x). \tag{1}$$

Calculons maintenant le DL de g en 1 à l'ordre 3. Pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1+x} \\ &= \sqrt{2 + (x-1)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{1 + \frac{x-1}{2}}.$$

Le DL de $\left(x \to \sqrt{1 + \frac{x-1}{2}}\right)$ en 1 s'obtient en composant le DL de $\left(x \to \frac{x-1}{2}\right)$ en 1 et le DL de $(x \to \sqrt{1+x})$ en $\frac{1-1}{2} = 0$ (que nous avons déjà écrit dans l'équation (1)). Pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \frac{x-1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 \epsilon_1\left(\frac{x-1}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{x-1}{4} - \frac{(x-1)^2}{32} + \frac{(x-1)^3}{128} + (x-1)^3 \epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

si on pose $\epsilon_2(x) = \frac{1}{8}\epsilon_1\left(\frac{x-1}{2}\right)$ pour tout x, fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 1 puisque ϵ_1 tend vers 0 en 0.
Ainsi, pour tout $x > -1$,

$$g(x) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x-1}{4} - \frac{(x-1)^2}{32} + \frac{(x-1)^3}{128} + (x-1)^3\epsilon_2(x)\right).$$

[Un DL en 1 doit s'écrire sous la forme $a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_n(x-1)^n + (x-1)^n\epsilon(x)$; il ne faut surtout pas développer les puissances de $x - 1$!]
On peut maintenant composer les DL trouvés pour g et h : il existe des fonctions ϵ_3, ϵ_4 tendant vers 0 en 0 telles que, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(h(x)) \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{h(x)-1}{4} - \frac{(h(x)-1)^2}{32} + \frac{(h(x)-1)^3}{128} + (h(x)-1)^3\epsilon_2(h(x))\right) \\
&= \sqrt{2}\Bigg(1 + \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)}{4} - \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)^2}{32} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)^3}{128} \\
&\quad + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)^3 \epsilon_2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)\Bigg) \\
&= \sqrt{2}\Bigg(1 + \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)}{4} - \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)^2}{32} \\
&\quad + \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon_1(x)\right)^3}{128}\Bigg) + x^3\epsilon_3(x) \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{64} - \frac{x^2}{128} + \frac{x^3}{256} + \frac{x^3}{1024} +\right) + x^3\epsilon_4(x)
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1024}x^3 + x^3\epsilon_4(x).$$

3. DL en $x_0 = 2$ à l'ordre 3 de la fonction $f : x \to \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$?
On remarque que f peut s'écrire comme la différence de deux fonctions un peu plus simples : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) \\ &= g(x) - \ln(x) \end{aligned}$$

si on définit, pour tout x, $g(x) = \ln(x+1)$.
Pour calculer le DL de f en 2, il suffit de calculer les DL de g et ln en 2 et d'en faire la différence.
Commençons par le DL de g en 2. Pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \ln((x-2) + 2 + 1) = \ln(3 + (x-2)) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x-2}{3}\right).$$

Le DL de $x \to \ln\left(1 + \frac{x-2}{3}\right)$ au point 2 s'obtient en composant le DL de $x \to \frac{x-2}{3}$ en 2 et celui de $x \to \ln(1+x)$ en $\frac{2-2}{3} = 0$.
Le DL de $x \to \ln(1+x)$ en 0 est un DL de référence : on sait qu'il existe $\epsilon_1 :] - 1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_1 \xrightarrow{0} 0$ et, pour tout x,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x).$$

Ainsi, il existe ϵ_2 une fonction telle que $\epsilon_2 \xrightarrow{2} 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(3) + \frac{x-2}{3} - \frac{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x-2}{3}\right)^3}{3} + (x-2)^3\epsilon_2(x) \\ &= \ln(3) + \frac{x-2}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(x-2)^3}{81} + (x-2)^3\epsilon_2(x). \end{aligned}$$

Le DL de ln en 2 s'obtient de la même manière : il existe ϵ_3 telle que $\epsilon_3 \xrightarrow{2} 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(2 + (x-2)) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{3} + (x-2)^3\epsilon_3(x) \\ &= \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + (x-2)^3\epsilon_3(x). \end{aligned}$$

Déduisons-en finalement le DL de f. Il existe une fonction ϵ_4 telle que $\epsilon_4 \overset{2}{\to} 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\ln(3) + \frac{x-2}{3} - \frac{(x-2)^2}{18} + \frac{(x-2)^3}{81}\right) \\
&\qquad - \left(\ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24}\right) + (x-2)^3\epsilon_4(x) \\
&= \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{x-2}{6} + \frac{5}{72}(x-2)^2 - \frac{19}{648}(x-2)^3 + (x-2)^3\epsilon_4(x).
\end{aligned}$$