Corrigé de l'exercice 4.21.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

1. Calculer la limite en 0 de $\left(x \to \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

On effectue le développement limité de $(x \to \ln(1+x))$ en 0. Il existe $\epsilon_1 :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_1 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1;+\infty[-\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)}{x(x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x))} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + \epsilon_1(x)}{1 - \frac{x}{2} + x\epsilon_1(x)} \\
&\xrightarrow{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + 0}{1 - 0 + 0} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Calculer la limite en 0^+ de $\left(x \to \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$.

Pour tout $x \in]0;\pi[$, $\sin(x) > 0$ et $x > 0$, de sorte que $\frac{\sin(x)}{x} > 0$ et $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est bien défini. Ainsi, la fonction considérée est bien définie au moins sur $]0;\pi[$; étudier son éventuelle limite en 0^+ a un sens.

Tâchons de trouver un DL à l'ordre 2 en 0 de $\left(x \to \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$. Pour cela, il est utile de commencer par le DL à l'ordre 2 de $\left(x \to \frac{\sin(x)}{x}\right)$.

On connaît le DL à l'ordre 3 de sin en 0 : il existe $\epsilon_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_2 \overset{0}{\to} 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_2(x).$$

On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x).$$
Ainsi, pour tout $x \in]0;\pi[$,
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x)\right).$$
On peut calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction en composant $\left(x \to -\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x)\right)$ et le développement limité à l'ordre 1 de $(x \to \ln(1+x))$ en $-\frac{0^2}{6} + 0^2\epsilon_2(0) = 0$. Il existe ϵ_3, ϵ_4 tendant vers 0 en 0 telles que
$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad \ln(1+x) = x + x\epsilon_3(x)$$
et
$$\begin{aligned}\forall x \in]0;\pi[, \qquad \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \left(-\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x)\right) + \left(-\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x)\right)\epsilon_3\left(-\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_2(x)\right) \\ &= -\frac{x^2}{6} + x^2\epsilon_4(x).\end{aligned}$$
On en déduit que, pour tout $x \in]0;\pi[$,
$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6} + \epsilon_4(x),$$
et donc que
$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

3. Calculer la limite en 0^+ de $\left(x \to \frac{\sqrt{\sin(x)}-\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})-\sqrt{x}}\right)$.

Notons $f : x \to \frac{\sqrt{\sin(x^2)}-x}{\sin(x)-x}$ et $g : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$. On doit étudier la limite en 0^+ de la fonction $f \circ g$. Puisque $g \overset{0^+}{\to} 0^+$, il suffit d'étudier la limite de f en 0^+. En effet, si f admet une limite en 0^+, on a, par composition de limites,
$$\frac{\sqrt{\sin(x)}-\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})-\sqrt{x}} = f \circ g(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \lim_{0^+} f.$$
Pour cela, nous allons effectuer un DL en 0 des numérateur et dénominateur de f. Commençons par le dénominateur. Il existe $\epsilon_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_5 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x) - x$$

$$= -\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x).$$

Effectuons maintenant un DL du numérateur en 0 à l'ordre 3 [1]. On obtient d'abord, en composant les DL à l'ordre 2 de sin et de $(x \to x^2)$ en 0, l'existence de $\epsilon_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_6 \overset{0}{\to} 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x^2) = x^2 + x^4\epsilon_6(x).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin(x^2)} &= \sqrt{x^2 + x^4\epsilon_6(x)} \\ &= x\sqrt{1 + x^2\epsilon_6(x)}.\end{aligned}$$

En composant $x \to x^2\epsilon_6(x)$ avec le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \to \sqrt{1+x}$, on en déduit qu'il existe ϵ_7 telle que $\epsilon_7 \overset{0}{\to} 0$ et, pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin(x^2)} &= x(1 + x^2\epsilon_7(x)) \\ &= x + x^3\epsilon_7(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\sin(x^2)} - x = x^3\epsilon_7(x),$$

Maintenant que nous avons obtenu les DL des numérateur et dénominateur de f, nous pouvons conclure : pour tout $x > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x^2)} - x}{\sin(x) - x} &= \frac{x^3\epsilon_7(x)}{-\frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_5(x)} \\ &= -6\frac{\epsilon_7(x)}{1 - 6\epsilon_5(x)} \\ &\overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $f \overset{0^+}{\to} 0$ et $\frac{\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}} \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

1. à l'ordre 3 car le premier terme non-nul du DL de $x \to \sin(x) - x$ est celui d'ordre 3