Corrigé de l'exercice 4.22.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 5}.$$

Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse 2 et trouver la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

Solution

1. Justification de l'existence de la tangente

Attention : même si ce n'est pas explicitement demandé, il convient de justifier l'existence de la tangente, c'est-à-dire la dérivabilité de f en 2.

La fonction $(x \to \sqrt[3]{x})$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, de même que la fonction $(x \to x^3 + 6x^2 - 5)$. Ainsi, f est la composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$: elle est également définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction $(x \to \sqrt[3]{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $(x \to x^3 + 6x^2 - 5)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivabilité des fonctions composées, la fonction f est dérivable en tout réel x_0 tel que $x_0^3 + 6x_0^2 - 5 \in \mathbb{R}_+^*$. On peut appliquer ce résultat à $x_0 = 2$ puisque $2^3 + 6.2^2 - 5 = 27 > 0$: f est dérivable en 2. Elle admet donc bien une tangente au point d'abscisse 2.

Attention : la fonction $(x \to \sqrt[3]{x})$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. La proposition 2.9 du poly de pré-rentrée calcul garantit que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En fait, il se trouve qu'elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. En revanche, elle n'est pas dérivable en 0 !

2. Calcul du DL de f au point 2 à l'ordre 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{(2 + (x-2))^3 + 6(2 + (x-2))^2 - 5} \\
&= \sqrt[3]{\big(8 + 3.4(x-2) + 3.2(x-2)^2 + (x-2)^3\big) + 6\big(4 + 2.2(x-2) + (x-2)^2\big) - 5} \\
&= \sqrt[3]{\big(8 + 3.4(x-2) + 3.2(x-2)^2 + (x-2)^3\big) + 6\big(4 + 2.2(x-2) + (x-2)^2\big) - 5} \\
&= \sqrt[3]{27 + 36(x-2) + 12(x-2)^2 + (x-2)^3} \\
&= \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{1 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{4}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{27}(x-2)^3}
\end{aligned}$$

$$= 3\sqrt[3]{1+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+\frac{1}{27}(x-2)^3}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définissons

$$g(x) = \frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+\frac{1}{27}(x-2)^3.$$

On peut calculer le DL de $\left(x \to \sqrt[3]{1+\frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+\frac{1}{27}(x-2)^3}\right)$ en 2 à l'ordre 2 en composant le DL de g en 2 (à l'ordre 2) et celui de $\left(x \to \sqrt[3]{1+x}\right)$ en $g(2) = 0$ (à l'ordre 2 également).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+\frac{1}{27}(x-2)^3 = \frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+o_2((x-2)^2)$$

et

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+o_0(x^2).$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3\left(1+\frac{\frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+o_2((x-2)^2)}{3}\right. \\
&\qquad -\frac{\left(\frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+o_2((x-2)^2)\right)^2}{9} \\
&\qquad \left.+o_2\left(\left(\frac{4}{3}(x-2)+\frac{4}{9}(x-2)^2+o_2((x-2)^2)\right)^2\right)\right) \\
&= 3\left(1+\frac{4}{9}(x-2)-\frac{4}{81}(x-2)^2+o_2((x-2)^2)\right) \\
&= 3+\frac{4}{3}(x-2)-\frac{4}{27}(x-2)^2+o_2((x-2)^2).
\end{aligned}$$

3. <u>Conclusion</u>
On déduit du développement limité qu'on vient de trouver que $f(2) = 3$ et $f'(2) = \frac{4}{3}$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse 2 est donc la droite d'équation

$$y = 3+\frac{4}{3}(x-2).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x)-\left(3+\frac{4}{3}(x-2)\right) &= -\frac{4}{27}(x-2)^2+o_2((x-2)^2) \\
&= (x-2)^2\left(-\frac{4}{27}+o_2(1)\right).
\end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas parce qu'on a abandonné la notation « ϵ » pour utiliser « o_2 » qu'il faut cesser de justifier rigoureusement la position relative du graphe et de sa tangente une fois qu'on a calculé le développement limité d'ordre 2 !
La fonction dans la parenthèse, $\left(x \to -\frac{4}{27} + o_2(1)\right)$, tend vers $-\frac{4}{27}$ en 2. D'après la définition de la convergence, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]2-\eta; 2+\eta[$,

$$-\frac{4}{27} + o_2(1) \in \left]-\frac{4}{27} - \frac{4}{27}; -\frac{4}{27} + \frac{4}{27}\right[= \left]-\frac{8}{27}; 0\right[.$$

Fixons un tel η. Pour tout $x \in]2-\eta; 2+\eta[$,

$$\begin{gathered} -\frac{4}{27} + o_2(1) < 0 \\ \text{et } (x-2)^2 \geq 0 \end{gathered}$$

donc

$$f(x) - \left(3 + \frac{4}{3}(x-2)\right) \leq 0.$$

Le graphe de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 2.