Corrigé de l'exercice 4.23.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Déterminer si les fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$, ou en $-\infty$. Si oui, la calculer et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

1. $f_1 : x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\to \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

On observe que la fonction f_1 tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$. En effet, pour tout $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty; \\ x^2 - 1 &\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty; \\ \sqrt{x} &\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Par composition, on en déduit

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} &\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty; \\ \sqrt{x^2-1} &\overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Les opérations usuelles sur les fonctions admettant des limites nous permettent donc de dire que

$$f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ll \frac{2}{(+\infty) + (+\infty)} \gg = 0.$$

La fonction f_1 admet donc pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite d'équation

$$y = 0.$$

Déterminons maintenant la position du graphe de f_1 par rapport à l'asymptote. Pour tout $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$,

$$f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} > 0.$$

Donc la courbe est au-dessus de l'asymptote, en $-\infty$ comme en $+\infty$.

2. $f_2 : x \in \mathbb{R}^* \to \frac{x\exp\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\exp(x)-1}$
Commençons par étudier la fonction en $-\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_2(x) = \frac{(xe^x)e^{1/x}}{e^x - 1}.$$

Puisque $\frac{1}{x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et exp est continue en 0,

$$e^{1/x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1.$$

De plus,

$$e^x - 1 \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 - 1 = -1.$$

Enfin, par le théorème des croissances dominées, on a que

$$xe^x \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Au moyen des opérations usuelles sur les fonctions convergentes, on obtient donc

$$f_2(x) = \frac{(xe^x)e^{1/x}}{e^x - 1} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{0 \times 1}{-1} = 0.$$

La fonction f_2 a donc une asymptote en $-\infty$, la droite d'équation $y = 0$.
Déterminons la position du graphe de f_2 par rapport à l'asymptote. Pour tout $x < 0$,

$$\exp\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0; \quad \text{(une exponentielle est toujours strictement positive)}$$
$$e^x < e^0 = 1; \quad \text{(exp est strictement croissante)}$$
$$\text{donc } e^x - 1 < 0.$$

Ainsi, pour tout $x < 0$,

$$f_2(x) = \frac{x\exp\left(x + \frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} > 0.$$

Donc le graphe de f_2 est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.
Étudions maintenant la fonction en $+\infty$.
On commence par mettre en facteur « xe^x » au numérateur et « e^x » au dénominateur : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_2(x) = \frac{xe^xe^{1/x}}{e^x(1 - e^{-x})} = x\left(\frac{e^{1/x}}{1 - e^{-x}}\right).$$

Nous allons ensuite effectuer des sortes de développements limités de $\left(x \to e^{1/x}\right)$ et $\left(x \to \frac{1}{1-e^{-x}}\right)$.
Pour $\left(x \to e^{1/x}\right)$, utilisons le développement limité de exp en 0 à l'ordre 2 : il existe $\epsilon_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_1 \overset{0}{\to} 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}. \tag{1}$$

Puisque $\frac{1}{x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\epsilon_1 \overset{0}{\to} 0$, on a par composition de limites

$$\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $\left(x \to \frac{1}{1-e^{-x}}\right)$, utilisons le développement limité de $x \to \frac{1}{1+x}$ en 0 à l'ordre 1 : il existe $\epsilon_2 : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_2 \overset{0}{\to} 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x\epsilon_2(x).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} - e^{-x}\epsilon_2(-e^{-x}). \tag{2}$$

Puisque $-e^{-x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\epsilon_2 \overset{0}{\to} 0$, on a par composition de limites

$$\epsilon_2(-e^{-x}) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Combinons les équations (1) et (2) : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{e^{1/x}}{1-e^{-x}} &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right)\left(1 + e^{-x}(1 - \epsilon_2(-e^{-x}))\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \\ &\qquad + \left(e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{2x^2} + \frac{e^{-x}\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right)(1 - \epsilon_2(-e^{-x})).\end{aligned}$$

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\epsilon_3(x) = \epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) + \left(x^2e^{-x} + xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{2} + e^{-x}\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)(1 - \epsilon_2(-e^{-x})).$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^{1/x}}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\epsilon_3(x)}{x^2}. \tag{3}$$

De plus, comme $\epsilon_1\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\epsilon_2(-e^{-x}) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^{-x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^2e^{-x} + xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{2} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), les opérations usuelles sur les fonctions admettant des limites nous garantissent que

$$\epsilon_3(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après l'équation (3), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_2(x) = x\left(\frac{e^{1/x}}{1-e^{-x}}\right) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\epsilon_3(x)}{x}.$$

Donc

$$f_2(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \epsilon_3(x)\right) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et la fonction f_2 admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.
De plus, puisque $\epsilon_3 \overset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x > M$,

$$|\epsilon_3(x)| < \frac{1}{2}.$$

Fixons un tel M. Alors, pour tout $x > M$,

$$\frac{1}{2} + \epsilon_3(x) \geq \frac{1}{2} - |\epsilon_3(x)| > 0,$$

d'où

$$f_2(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \epsilon_3(x)\right) > 0.$$

Le graphe de f_2 est donc au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.