Corrigé de l'exercice 4.25.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Calculer des équivalents simples des suites suivantes ($n \geq 1$).

$$u_n = \left(n \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right)^n \qquad v_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} \qquad w_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$$
$$x_n = n \ln\left(\sqrt{\tfrac{n-1}{n+1}}\right) \qquad y_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} \qquad z_n = n^{1/n} - 1.$$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(5+n^2+n) - \ln(n^2-n+3) \\ &= \ln\left(\frac{5+n^2+n}{n^2-n+3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)\left(\frac{1}{1+\delta_n}\right)\right), \end{aligned}$$

si on définit $\delta_n = -\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Dans la mesure où $\delta_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, on peut effectuer le changement de variable « $x = \delta_n$ » dans la formule du DL à l'ordre 1 de $\left(x \to \frac{1}{1+x}\right)$ en 0 :

$$\frac{1}{1+\delta_n} = 1 - \delta_n + o(\delta_n) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, pour tout n,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La dernière égalité a été obtenue par le changement de variable « $x = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ » dans la formule du DL de $(x \to \ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 1.
On en déduit que $u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)$ et donc

$$u_n \sim \frac{2}{n}.$$

Suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \exp\left(n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

Calcul du développement asymptotique à l'ordre 1 de $\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$: on utilise le développement limité de tan en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 1, qui nous est donné par la formule de Taylor-Young (qu'on peut bien appliquer puisque tan est $\mathcal{C}^\infty$, et donc $\mathcal{C}^1$, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$) :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + o_{\pi/3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3} + 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + o_{\pi/3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{3}$, on peut effectuer le changement de variable « $x = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}$ » dans la formule précédente :

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right) = \sqrt{3} + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Calcul du développement asymptotique à l'ordre 1 de $\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$: d'après la formule de Taylor-Young appliquée à ln en $\sqrt{3}$ à l'ordre 1 (on peut appliquer cette formule car ln est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$),

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) &= \ln\left(\sqrt{3}\right) + \ln'\left(\sqrt{3}\right)(x - \sqrt{3}) + o_{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) \\ &= \frac{\ln(3)}{2} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + o_{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}).\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable « $x = \sqrt{3} + \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ » :

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(3)}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Fin du calcul : d'après le développement asymptotique précédent,

$$n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right) = n\frac{\ln(3)}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} + o(1).$$

En conséquent,

$$\begin{aligned} v_n &= \exp\left(n\frac{\ln(3)}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} + o(1)\right) \\ &= e^{n\frac{\ln(3)}{2}} e^{\frac{4}{\sqrt{3}}} e^{o(1)} \\ &= 3^{\frac{n}{2}} e^{\frac{4}{\sqrt{3}}} e^{o(1)}. \end{aligned}$$

Comme exp est continue en 0, $e^{o(1)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$, c'est-à-dire que $e^{o(1)} \sim 1$. Par produit d'équivalents, cela nous donne

$$v_n \sim 3^{\frac{n}{2}} e^{\frac{4}{\sqrt{3}}}.$$

Suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \\ &= \frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n+1} \\ &= \frac{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1}. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $1 + \frac{1}{n^2} \to 1$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \to 0$, c'est-à-dire que

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = o(1).$$

En particulier, on a aussi $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = o(\ln(n))$ et donc

$$2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim 2\ln(n).$$

De plus, $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Par produit d'équivalents,

$$w_n \sim \frac{2\ln(n)}{n}.$$

Suite $(x_n)_{n\geq 2}$:
Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n^2-1}.$$

Donc

$$\frac{x_n}{2/n^2} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$x_n \sim \frac{2}{n^2}.$$

Suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Écrivons le DL en 0 à l'ordre 1 de sin : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x + o_0(x).$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut effectuer le changement de variable « $x = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ». Cela donne

$$y_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

c'est-à-dire que $y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

De plus, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ (car $\frac{1/\sqrt{n+1}}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$). Par transitivité de l'équivalence (point 3 de la proposition 2.45 du poly),

$$y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

Écrivons le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \to \cos(x)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$$

On peut effectuer dans cette expression le changement de variable « $x = \frac{1}{n}$ », puisque $\frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned} z_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1+x) = x + o_0(x).$$

Via le changement le variable « $x = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ », cela donne

$$z_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

donc $z_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.