Corrigé de l'exercice 4.25 - suite y

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Calculer un équivalent simple de la suite y définie par

$$y_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On utilise l'astuce des quantités conjuguées : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}. \end{aligned}$$

Nous allons ensuite trouver des équivalents simples des numérateur et dénominateur de cette expression.
Pour le numérateur, on utilise à nouveau les quantités conjuguées puis on met en facteur le terme dominant au dénominateur : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} &= \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \\ &= \frac{1}{n}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Les opérations usuelles sur les suites convergentes et la continuité de $\sqrt{.}$ en 1 nous permettent d'affirmer que

$$\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc

$$\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \sim 1.$$

Par produit d'équivalents, on en déduit donc que

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Cherchons maintenant un équivalent du dénominateur. On met en facteur le terme dominant, $\sqrt{n}$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} &= \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2+1}\right)}+\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}\right)} \\
&= \sqrt{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}+\sqrt{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right).
\end{aligned}$$

Les opérations usuelles sur les limites ainsi que la continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ nous permettent d'affirmer que

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{2}$$

et donc que

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \sim 2\sqrt{2}.$$

Par produit d'équivalents, on en déduit

$$\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right) \sim 2\sqrt{2n}. \quad (2)$$

En faisant le quotient des équations (1) et (2), on obient

$$y_n \sim \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}n^{3/2}}.$$