Corrigé de l'exercice 4.26.ter

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 4.26.ter

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on pose

$$f(x) = \frac{x^2}{x - e^{-x}}.$$

1. Montrer que f est bien définie et que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a
$$f(x) > x.$$
2. On définit $u_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite u est bien définie et strictement croissante.
3. Montrer que u n'est pas majorée.
4. Montrer que u tend vers $+\infty$.
5. Montrer qu'en $+\infty$, $f(x) = x + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$, puis que $e^{f(x)} = e^x + 1 + o_{+\infty}(1)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$. Montrer que $v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En considérant la convergence de v au sens de Cesaro, montrer que
$$\frac{e^{u_n}}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
7. Montrer que $u_n = \ln(n) + o(1)$.

Introduction

- Le but de l'exercice est d'établir un « développement asymptotique » pour une suite définie par une relation de récurrence.
- Cet exercice est proche du 4.26.bis. Dans les deux cas, on s'intéresse à une suite définie par l'application récursive d'une fonction (sin dans l'exercice 4.26.bis, f dans l'exercice 4.26.ter). On commence par utiliser les propriétés de monotonie de la suite pour montrer qu'elle a une limite (finie dans un cas, infinie dans l'autre) et calculer celle-ci. On effectue ensuite un développement limité (plus précisément, dans le cas de l'exercice 4.26.ter, un développement « asymptotique ») de la fonction, qui nous permet de démontrer qu'une certaine suite v, donnée par l'énoncé, admet une limite finie non-nulle. On conclut à l'aide de la convergence de v au sens de Cesaro.

- La principale différence dans la méthode de résolution est que le calcul du développement asymptotique de f nécessite significativement plus de travail que le calcul du développement limité de sin.

  Au niveau du résultat obtenu, celui de l'exercice 4.26.ter est plus précis que celui de l'exercice 4.26.bis. En effet, on n'obtient pas seulement un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui correspondrait à l'égalité « $u_n = \ln(n) + o(\ln(n))$ ») : on démontre une propriété plus forte sur le deuxième terme du développement asymptotique (« $o(1)$ » au lieu de « $o(\ln(n))$ »).

1. Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on pose
$$f(x) = \frac{x^2}{x - e^{-x}}.$$
Montrer que f est bien définie et que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a
$$f(x) > x.$$

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $-x \leq -1$ donc $e^{-x} \leq e^{-1} < e^0 = 1$ (par stricte croissance de l'exponentielle). En conséquent, pour tout $x \in [1; +\infty[$,
$$x - e^{-x} \geq 1 - e^{-x} > 0$$
et $f(x)$ est bien définie.
De plus, pour tout $x \in [1; +\infty[$,
$$0 < x - e^{-x} < x.$$
(On vient de démontrer l'inégalité de gauche ; celle de droite est une conséquence de la stricte positivité de l'exponentielle.)
Donc, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\frac{1}{x-e^{-x}} > \frac{1}{x}$; on peut multiplier cette inégalité par x^2, qui est strictement positif :
$$f(x) = \frac{x^2}{x - e^{-x}} > x.$$

2. On définit $u_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite u est bien définie et strictement croissante.

On montre simultanément les deux propriétés demandées.
Pour cela, on montre par récurrence que, pour tout n, la suite u est bien définie au moins jusqu'au rang n et qu'elle est strictement croissante jusqu'au rang n (c'est-à-dire $u_0 < u_1 < \cdots < u_n$).

- Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ est bien défini. La suite est aussi strictement croissante jusqu'au rang 0 (comme toutes les suites).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u est bien définie et strictement croissante au moins jusqu'au rang n. Alors
$$1 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n$$
donc $u_n \geq 1$. Ainsi, u_n appartient au domaine de définition de f et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

De plus, d'après la question 1., $f(u_n) > u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$. En combinant cela à l'hypothèse de récurrence, on obtient bien que

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1}.$$

3. Montrer que u n'est pas majorée.

Supposons par l'absurde que u est majorée. Comme elle est croissante, elle converge. Notons ℓ sa limite. On se rappelle que $\ell = \sup u$; on a donc en particulier $\ell \geq u_0 = 1$, c'est-à-dire que ℓ appartient au domaine de définition de f.
La fonction f est continue sur son domaine de définition (comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Ainsi, puisque $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$,

$$f(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u et on a aussi

$$f(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Cela contredit l'inégalité démontrée à la question 1.

4. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n > M.$$

Comme M n'est pas un majorant de u (puisque u n'est pas majorée), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_N > M.$$

Fixons un tel N.
Pour tout $n \geq N$, puisque u est croissante,

$$u_n \geq u_N > M,$$

donc $u_n > M$.

5. Montrer qu'en $+\infty$, $f(x) = x + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$, puis que $e^{f(x)} = e^x + 1 + o_{+\infty}(1)$.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) - (x + e^{-x}) &= \frac{x^2}{x - e^{-x}} - \frac{(x + e^{-x})(x - e^{-x})}{x - e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-2x}}{x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\frac{e^{-2x}}{x-e^{-x}}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{x - e^{-x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, cette fonction est le quotient d'une fonction qui tend vers 0 et d'une qui tend vers $+\infty$.
Donc $\frac{e^{-2x}}{x-e^{-x}} = o_{+\infty}(e^{-x})$, ce qui implique la première propriété demandée :

$$f(x) = x + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x}).$$

Montrons maintenant la deuxième propriété : pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} e^{f(x)} &= e^{x+e^{-x}+o_{+\infty}(e^{-x})} \\ &= e^x \times e^{e^{-x}+o_{+\infty}(e^{-x})}. \end{aligned} \tag{1}$$

On connaît le développement limité de exp en 0 à l'ordre 1 :

$$e^y = 1 + y + o_0(y).$$

Puisque $e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x}) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser ce développement limité pour $y = e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$. Cela nous donne qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} e^{e^{-x}+o_{+\infty}(e^{-x})} &= 1 + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x}) + o_{+\infty}\left(e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})\right) \\ &= 1 + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x}). \end{aligned}$$

On combine cela avec l'équation (1) :

$$e^{f(x)} = e^x\left(1 + e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})\right) = e^x + 1 + o_{+\infty}(1).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$. Montrer que $v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En considérant la convergence de v au sens de Cesaro, montrer que

$$\frac{e^{u_n}}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La suite u tendant vers $+\infty$, on peut appliquer l'égalité $e^{f(x)} = e^x + 1 + o_{+\infty}(1)$, valable pour x tendant vers $+\infty$, à $x = u_n$ pour n tendant vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} e^{u_{n+1}} &= e^{f(u_n)} \\ &= e^{u_n} + 1 + o_{+\infty}(1). \end{aligned}$$

Donc

$$v_n = 1 + o_{+\infty}(1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La convergence de v au sens de Cesaro nous donne que

$$\frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim v = 1.$$

Or, pour tout n,

$$\frac{v_0 + v_1 \cdots + v_{n-1}}{n} = \frac{e^{u_n} - e^{u_0}}{n}$$

$$= \frac{e^{u_n}}{n} - \frac{e}{n}.$$

Donc

$$\frac{e^{u_n}}{n} = \frac{v_0 + v_1 \cdots + v_{n-1}}{n} + \frac{e}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1 + 0 = 1.$$

7. Montrer que $u_n = \ln(n) + o(1)$.

D'après la question précédente,

$$e^{u_n - \ln(n)} = \frac{e^{u_n}}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1.$$

Puisque la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut en déduire que

$$u_n - \ln(n) = \ln\left(e^{u_n - \ln(n)}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} \ln(1) = 0.$$

Donc $u_n - \ln(n) = o(1)$, c'est-à-dire $u_n = \ln(n) + o(1)$.