Corrigé de l'exercice 4.28 - question (c)

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Calculer $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$.

Solution :
On va effectuer le changement de variable « $y = \sqrt{1+x}$ ». On pose donc

$$\phi(x) = \sqrt{1+x}, \quad \forall x \in [1;3].$$

Pour utiliser la formule de changement de variable du cours, il faut écrire la fonction à intégrer sous la forme « $f(\phi(x))\phi'(x)$ », pour une certaine fonction f continue. Nous devons donc choisir f de sorte que, pour tout $x \in [1;3]$,

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x}} = f(\phi(x))\phi'(x) = \frac{f(\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1+x}},$$
$$\iff \quad f(\sqrt{1+x}) = \frac{2}{x}.$$

Pour déterminer « le bon choix » de f, réécrivons l'égalité précédente en fonction de $y = \sqrt{1+x}$. On veut que, pour tout $x \in [1;3]$,

$$f(y) = \frac{2}{x} = \frac{2}{y^2-1}.$$

Définissons donc

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1}, \quad \forall x \in]1;+\infty[.$$

Ce choix assure bien que, pour tout $x \in [1;3]$,

$$\frac{f(\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{((\sqrt{1+x})^2-1)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{x\sqrt{1+x}}.$$

Puisque f est continue sur son ensemble de définition et ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le sien, on peut appliquer la formule de changement de variable :

$$\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \int_1^3 f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\phi(1)}^{\phi(3)} f(y)dy \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2}{y^2 - 1} dy \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy \\
&= [\ln(y-1) - \ln(y+1)]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= (\ln(1) - \ln(3)) - (\ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(\sqrt{2} + 1)) \\
&= \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) - \ln(3).
\end{aligned}
$$