Corrigé de l'exercice 4.2.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Dans cet exercice, A et B désigneront des parties non-vides bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies quelles que soient A et B satisfaisant ces propriétés, et celles qui ne le sont pas. Lorsque l'assertion est vraie, on la démontrera. Lorsqu'elle est fausse, on donnera un contre-exemple.

1. $\sup A \leq \sup B$.
2. $\inf A \leq \inf B$.
3. Si $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$, alors $A = B$.

Introduction

- Cet exercice vise à étudier la question suivante : si on fait l'hypothèse qu'un ensemble est inclus dans un autre, quelles propriétés peut-on en déduire sur les relations entre les bornes inférieures et supérieures de ces ensembles ?
- L'exercice précédent étudiait la même question, pour les majorants et minorants au lieu des bornes inférieures et supérieures. Puisque les bornes inférieures et supérieures sont, respectivement, des minorants et majorants, on peut espérer réutiliser les stratégies de raisonnement de l'exercice 4.2, voire directement l'une des propriétés vues dans cet exercice.
- Néanmoins, les bornes supérieures et inférieures ne sont pas des majorants et minorants quelconques mais, respectivement, le *plus petit* des majorants et le *plus grand* des minorants. Il faudra tenir compte de cette propriété supplémentaire.

Développement

On remarque que les bornes inférieures et supérieures de A et B existent bien puisque A et B sont des parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. **$\sup A \leq \sup B$: vrai.**
Démonstration : pour tout $x \in A$, on a que $x \in B$ (puisque $A \subset B$) donc, comme $\sup B$ est un majorant de B,

$$x \leq \sup B.$$

Donc $\sup B$ est un majorant de A.

De plus, $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire qu'il est inférieur ou égal à tous les majorants de A. En conséquent, puisque $\sup B$ est un majorant de A,

$$\sup A \leq \sup B.$$

2. **$\inf A \leq \inf B$: faux.**
Contre-exemple : si $A = [1; 2]$ et $B = [0; 2]$, on a bien $A \subset B$ mais

$$\inf A = 1 > 0 = \inf B.$$

3. **Si $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$ alors $A = B$: faux.**
Contre-exemple : si $A = \{0, 2\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$, on a bien $A \subset B$. De plus, $\inf A = 0 = \inf B$ et $\sup A = 2 = \sup B$ mais $A \neq B$ puisque 1 appartient à B mais pas à A.

Conclusion

On a en effet pu réutiliser les raisonnements de l'exercice 4.2 : le premier paragraphe de la question 1. est très similaire au raisonnement effectué à la question 2. de l'exercice 4.2 ; le contre-exemple de la question 2. est similaire au contre-exemple fourni à la question 1. de l'exercice 4.1. En revanche, on n'a pas pu réutiliser directement les propriétés établies dans l'exercice 4.2. La propriété qui dit que, si $A \subset B$, alors tout majorant de B est un majorant de A, aurait été utile pour raccourcir la question 1. mais elle ne faisait pas partie de celles que nous avions étudiées dans l'exercice 4.2.