Corrigé de l'exercice 4.31.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$(a) \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} \quad (b) \lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Introduction

- Le but de l'exercice est de déterminer la limite (si elle existe) de deux suites, dont chaque terme est donné sous la forme d'une somme.
- Les termes à l'intérieur des sommes sont assez semblables à ceux de l'exercice 4.31. Cela suggère de procéder de la même manière que dans cet exercice, en récrivant les termes en fonction de $\frac{k}{n}$ et n (plutôt qu'en fonction de k et n) pour faire apparaître des sommes de Riemann.
- À première vue, la principale différence avec l'exercice 4.31 est que les indices k des sommes à étudier ne varient pas de 0 à $n-1$ mais de 0 à $2n-1$ (ou $2n$). Pour se ramener à la situation de l'exercice 4.31, on peut commencer par effectuer un changement de variable, en posant $N = 2n$.

Développement

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Posons $N = 2n$ et exprimons $\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$ en fonction de N :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{k^2+\left(\frac{N}{2}\right)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2},\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de $\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

Étudions la limite éventuelle de $\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{4N\left(\frac{k}{N}\right)}{4N^2\left(\frac{k}{N}\right)^2+N^2} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{4\left(\frac{k}{N}\right)}{4\left(\frac{k}{N}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)
\end{aligned}$$

si on définit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \frac{4x}{4x^2+1}.$$

Le théorème du cours sur les sommes de Riemann (qu'on peut appliquer car f est continue sur $[0;1]$) nous dit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) &\overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{4x}{4x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{8x}{4x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(4x^2+1)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(5)}{2}.
\end{aligned}$$

En conséquent,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2} \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(5)}{2}.$$

Comme on a vu que $\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était une sous-suite de $\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{4k}{4k^2+N^2}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$, on a également

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(5)}{2}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$$

$$\geq 1$$

donc

$$n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \geq n.$$

Par comparaison, on en déduit que $n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Conclusion

Pour la question (a), on pouvait bien procéder comme dans l'exercice 4.31, après avoir effectué le changement de variable $N = 2n$. En revanche, pour la question (b), cette approche ne fonctionnait pas : si on essayait, on se retrouvait à tenter d'appliquer le théorème sur les sommes de Riemann à la fonction $\left(x \to \frac{1}{x^2}\right)$ sur $[0; 1]$, alors que cette fonction n'est pas Riemann-intégrable sur $[0; 1]$. Il fallait donc savoir renoncer aux sommes de Riemann pour utiliser un argument plus simple (en l'occurence, un théorème de comparaison).