Corrigé de l'exercice 4.78

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

Soit F la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sin(t)}dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer F' et en déduire les variations de F sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
4. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a
$$t-\frac{t^2}{2}<\sin(t)<t$$
donc que
$$\frac{1}{t}<\frac{1}{\sin(t)}<\frac{1}{t}+\frac{1}{2-t}.$$
5. Montrer que pour tout $x\in]0;1[$ on a
$$\ln(2)<F(x)<\ln(2)-\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$$
et en déduire la limite de $F(x)$ quand $x\to 0$.

Corrigé

Soit F la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\sin(t)}dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ quelconque. Puisque $0<x<2x<\pi$ et puisque sin ne s'annule pas sur $]0;\pi[$, on peut affirmer que sin ne s'annule pas sur le segment $[x;2x]$. La fonction $\left(t\to\frac{1}{\sin(t)}\right)$ est donc définie et continue sur $[x;2x]$, comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est donc Riemann-intégrable (Théorème 3.29 du poly) et $F(x)$ est bien défini.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Première étape : définition d'une fonction auxiliaire G à laquelle on pourra appliquer les propositions 3.38 et 3.39 du cours

Soit $\epsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ quelconque.
Pour tout $x \in [\epsilon; \pi - \epsilon]$, définissons

$$G(x) = \int_{\epsilon}^{x} \frac{1}{\sin(t)} dt.$$

La fonction $\frac{1}{\sin}$ est continue, donc Riemann-intégrable sur $[\epsilon; \pi - \epsilon]$. Ainsi, la fonction G est bien définie.
D'après la proposition 3.38 (qu'on peut appliquer car $\frac{1}{\sin}$ est Riemann-intégrable sur $[\epsilon; \pi - \epsilon]$), G est continue.
D'après la proposition 3.39 (qu'on peut appliquer car $\frac{1}{\sin}$ est continue sur $[\epsilon; \pi - \epsilon]$, en plus d'y être Riemann-intégrable), G est dérivable et, pour tout $x_0 \in [\epsilon; \pi - \epsilon]$,

$$G'(x_0) = \frac{1}{\sin(x_0)}.$$

En particulier, G' est continue sur $[\epsilon; \pi - \epsilon]$ car $\frac{1}{\sin}$ l'est.
Ainsi, G est continue, dérivable et de dérivée continue : c'est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon; \pi - \epsilon]$.

Deuxième étape : expression de F en fonction de G

Remarquons que, pour tout $x \in \left[\epsilon; \frac{\pi}{2} - \epsilon\right]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x}^{\epsilon} \frac{1}{\sin(t)} dt + \int_{\epsilon}^{2x} \frac{1}{\sin(t)} dt \\ &= -\int_{\epsilon}^{x} \frac{1}{\sin(t)} dt + \int_{\epsilon}^{2x} \frac{1}{\sin(t)} dt \\ &= -G(x) + G(2x). \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\left[\epsilon; \frac{\pi}{2} - \epsilon\right]$, F est une somme de composées de fonctions $\mathcal{C}^1$: elle est également $\mathcal{C}^1$.

Conclusion

On a montré que, pour tout $\epsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\epsilon; \frac{\pi}{2} - \epsilon\right]$.
On peut en déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. En effet, pour tout $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, il existe ϵ tel que

$$\epsilon < x_0 < \frac{\pi}{2} - \epsilon.$$

Ainsi, F est $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire continue, dérivable et de dérivée continue) sur $\left[\epsilon; \frac{\pi}{2} - \epsilon\right]$, qui est un voisinage de x_0. Elle est donc continue en x_0, dérivable au voisinage de x_0 et de dérivée continue en x_0.
Puisque ces propriétés sont vraies pour tout $x_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Calculer F' et en déduire les variations de F sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Première étape : calcul de la dérivée

On reprend les notations de la question précédente : pour $\epsilon \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ quelconque, on définit G ainsi que précédemment. On a vu que, pour tout $x_0 \in [\epsilon; \pi - \epsilon]$,

$$G'(x_0) = \frac{1}{\sin(x_0)}.$$

Puisque, pour tout $x \in \left]\epsilon; \frac{\pi}{2} - \epsilon\right[$,

$$F(x) = -G(x) + G(2x),$$

on a

$$F'(x) = -G'(x) + 2G'(2x) = -\frac{1}{\sin(x)} + \frac{2}{\sin(2x)}.$$

Cela démontre que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$F'(x) = -\frac{1}{\sin(x)} + \frac{2}{\sin(2x)}.$$

(Il suffit d'appliquer le résultat précédent à un ϵ suffisamment petit pour que $\epsilon < x < \frac{\pi}{2} - \epsilon$.)

Deuxième étape : étude des variations de F

Pour tout x,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{\sin(x)} + \frac{2}{\sin(2x)} \\ &= -\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} \\ &= \frac{1}{\sin(x)}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin(x)$ et $0 < \cos(x) < 1$, donc

$$\frac{1}{\sin(x)} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos(x)} - 1 > 0.$$

En conséquent, F' est strictement positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et F est strictement croissante sur cet intervalle.

4. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

donc que

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}.$$

Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ quelconque.
Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x, pour la fonction sin (c'est possible : sin est deux fois dérivable). Cette formule garantit qu'il existe $c \in]0; t[$ tel que

$$\sin(t) = \sin(0) + \sin'(0)t + \sin''(c)\frac{t^2}{2} = t - \sin(c)\frac{t^2}{2}.$$

Fixons un tel c.
Puisque $0 < c < t < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} & 0 < \sin(c) < 1; \\ \Rightarrow \quad & -1 < -\sin(c) < 0; \\ \Rightarrow \quad & -\frac{t^2}{2} < -\sin(c)\frac{t^2}{2} < 0 \quad (\text{car } \tfrac{t^2}{2} > 0), \end{aligned}$$

de sorte que

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t.$$

Les réels $t - \frac{t^2}{2}, \sin(t), t$ sont strictement positifs. En effet, comme $0 < t < \frac{\pi}{2} < 2$,

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t) > 0$$

et, puisque $t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$, les deux autres nombres sont aussi strictement positifs.
La fonction $\left(x \to \frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La double inégalité qu'on vient de démontrer entraîne donc

$$\frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} > \frac{1}{\sin(t)} > \frac{1}{t}.$$

Comme $\frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t(2-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$, c'est exactement l'inégalité voulue.

5. Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$ on a

$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2 - 2x}{2 - x}\right)$$

et en déduire la limite de $F(x)$ quand $x \to 0$.
On commence par remarquer que les doubles inégalités de la question 4. sont aussi vraies pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\right[$. En effet, soit $t \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\right[$ quelconque. On a $\sin(t) > 1/2$ car $\frac{\pi}{2} \leq t < 2 < \frac{5\pi}{6}$, donc

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} \leq \frac{1}{2} < \sin(t).$$

D'autre part, $\sin(t) \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq t$. On a donc bien

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t.$$

De la même manière qu'à la question 4., on peut en déduire

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}.$$

Résolvons maintenant la question 5. Soit $x \in]0;1[$ quelconque. Puisque $[x;2x] \subset]0;2[$, on peut dire, d'après la question 4. et l'extension qu'on vient d'en faire, que

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{\sin(t)} dt < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right) dt.$$

Or

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$$

et

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}\right) dt &= [\ln(t) - \ln(2-t)]_x^{2x} \\ &= \ln(2x) - \ln(2-2x) - \ln(x) + \ln(2-x) \\ &= \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right).\end{aligned}$$

On obtient donc bien

$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right) \tag{1}$$

Étudions maintenant le comportement de F en 0. Les opérations usuelles sur les limites nous disent que

$$\frac{2-2x}{2-x} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

La fonction ln est continue en 1 donc

$$\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right) \xrightarrow{x\to 0} \ln(1) = 0.$$

Ainsi, les membres gauche et droit de la double inégalité (1) tendent vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers 0. Par encadrement,

$$F(x) \xrightarrow{x\to 0} \ln(2).$$