Corrigé de l'exercice 4.8.bis

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Énoncé

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty.$$

1. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty; -M[\cup]M; +\infty[$ on a
$$f'(x) \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que $f(x)$ tend vers $-\infty$ vers $-\infty$.
3. Montrer que f est surjective.

Introduction

- Le but de l'exercice est de montrer qu'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$ est surjective.
- Les deux premières questions sont extrêmement similaires aux première et troisième de l'exercice 4.8. Pour ces questions, on va pouvoir reprendre fidèlement le raisonnement utilisé à l'exercice précédent. Quelques modifications seront à effectuer pour tenir compte du fait que, dans l'exercice 4.8 bis, on considère des limites en $-\infty$ en plus des limites en $+\infty$ et que f' admet des limites infinies, au lieu d'une limite finie dans l'exercice 4.8. Néanmoins, cela ne changera pas la structure du raisonnement.
- La troisième question n'a pas de similarité avec celles de l'exercice 4.8. Il faudra utiliser une méthode nouvelle pour la résoudre.

Développement

1. Par hypothèse, f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M_1 \in \mathbb{R}^+, \forall x > M_1, f'(x) > A.$$

Appliquons cette propriété pour $A = \frac{1}{2}$: il existe $M_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in]M_1; +\infty[$, $f'(x) > \frac{1}{2}$. Fixons un tel M_1.

De même, comme f' tend vers $+\infty$ en $-\infty$, on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M_2 \in \mathbb{R}^-, \forall x < M_2, f'(x) > A.$$

Pour $A = \frac{1}{2}$, on obtient qu'il existe $M_2 \in \mathbb{R}^-$ tel que, pour tout $x \in]-\infty; M_2[$, $f'(x) > \frac{1}{2}$. Fixons un tel M_2.
Posons

$$M = \max(M_1, -M_2).$$

Pour tout $x \in]-\infty; -M[\cup]M; \infty[$,

- soit $x < -M \leq M_2$ et alors $f'(x) > \frac{1}{2}$ d'après la définition de M_2,
- soit $x > M \geq M_1$ et alors $f'(x) > \frac{1}{2}$ d'après la définition de M_1.

On a donc, pour tout $x \in]-\infty; -M[\cup]M; \infty[$, que $f'(x) \geq \frac{1}{2}$.
2. Soit $x \in]M; +\infty[$ quelconque. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable). Elle est en particulier continue sur $[M; x]$. Elle est également dérivable sur $]M; x[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]M; x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(M)}{x - M} = f'(c).$$

Fixons un tel c. Puisque $c > M$, on doit avoir $f'(c) \geq \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(M)}{x - M} \geq \frac{1}{2}; \\ \Rightarrow \quad & f(x) \geq \frac{x - M}{2} + f(M). \end{aligned}$$

On vient de montrer que, pour tout $x > M$, $f(x) \geq \frac{x-M}{2} + f(M)$. Puisque

$$\frac{x - M}{2} + f(M) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

on peut dire, par comparaison, que $f(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De la même manière, pour tout $x \in]-\infty; -M[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x; -M]$. On en déduit que, pour un certain $c \in]x; -M[$,

$$\frac{f(-M) - f(x)}{-M - x} = f'(c) \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; -M[$,

$$f(x) \leq \frac{x + M}{2} + f(-M).$$

Puisque

$$\frac{x + M}{2} + f(-M) \overset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

on peut dire, par comparaison, que $f(x) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, son image $f(\mathbb{R})$ est donc un intervalle non-vide.

Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, f n'est pas majorée donc $f(\mathbb{R})$ n'est pas majorée. De même, puisque f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, f n'est pas minorée donc $f(\mathbb{R})$ n'est pas minorée.

Ainsi, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle non-vide qui n'est ni majoré ni minoré. Il s'agit donc de $\mathbb{R}$ tout entier : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est surjective.

Conclusion

Comme indiqué dans l'introduction, les questions 1 et 2 étaient une adaptation relativement directe du raisonnement effectué à l'exercice 4.8. La question 3 était plus délicate. Il fallait en effet penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, il fallait réaliser que le théorème des valeurs intermédiaires ne donnait pas directement le résultat demandé et qu'un raisonnement supplémentaire (ici portant sur la non-majoration et la non-minoration de f) était nécessaire pour conclure.