Université Paris Dauphine
2021-2022

Géométrie et systèmes dynamiques
Feuilles d'exercices

Table des matières

Les exercices qui suivent sont largement empruntés aux ouvrages ou aux cours en ligne :

- Benzoni S. Calcul différentiel et équations différentielles, SMAI Dunod, 2010
- Marle C.-M Systemes dynamiques - une introduction. Ellipse, 2003.
- Texier B. "Géométrie différentielle"
https://webusers.imj-prg.fr/ benjamin.texier/enseignement/geodiff/2015/cours-geodiff.pdf

1 Calcul différentiel

Exercice 1.1 Soient f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $f'(x) \neq g'(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \to (x + y, f(x) + g(y)) \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 1.2 Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = \left(\int_0^{x+y} \phi(t)dt, \int_0^{xy} \phi(t)dt \right).$$

(i) Montrer que l'application F est de classe C^1 et calculer dF.

(ii) On suppose que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(1) \neq 0$. Montrer que F est un difféomorphisme local en $(0, 1)$ et en $(1, 0)$.

(iii) On suppose que $\phi(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que F est un difféomorphisme de $D := \{(x, y),\ x < y\}$ sur son image.

Exercice 1.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ avec $|f'(x)| \leq \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$.

(i) Montrer que $dF(x, y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x, y) = (a - f(y), b - f(x))$ est contractante sur $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne). En déduire que F est surjective.

[Indication : utiliser le théorème du point fixe, à savoir que toute application contractante d'un espace métrique complet vers lui-même admet un point fixe.]

(iii) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.4 Soient X, Y deux espaces de Banach et $Isom(X, Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur Y. On pose $Isom(X) := Isom(X, X)$.

(i) Soit $h \in L(X)$ tel que $\|h\|_{L(X)} < 1$. Montrer que $I_X - h \in Isom(X)$ et que

$$(I_X - h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k.$$

[On pensera à justifier la convergence de la série.]

(ii) Soient $u \in Isom(X, Y)$ et $v \in L(X, Y)$ tel que $\|u - v\|_{L(X,Y)} < \|u^{-1}\|_{L(Y,X)}^{-1}$. Montrer que $v \in Isom(X, Y)$.

(iii) En déduire que $Isom(X, Y)$ est un ouvert de $L(X, Y)$.

(iv) Montrer que l'application $\Phi : Isom(X, Y) \to L(Y, X)$ définie par $\Phi(f) = f^{-1}$ est continue sur $Isom(X, Y)$.

(v) Montrer que Φ est de classe C^1 sur $Isom(X, Y)$ et que, pour tout $f \in Isom(X, Y)$,

$$d\Phi(f)(v) = -f^{-1} \circ v \circ f^{-1} \qquad v \in L(X, Y).$$

Exercice 1.5 Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$, $M_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices de format $n \times n$ et $O(n)$ est le groupe orthogonal :

$$M \in O(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad MM^T = I_n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que $df(x) \in O(n)$ pour tout x. On va montrer que f est nécessairement affine (i.e., df est constante).

(i) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local.

(ii) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$.

(iii) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert sur lequel f est un C^1-difféomorphisme. Montrer que, pour tous $x, y \in f(V)$,
$$||f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|| \leq ||x - y||.$$
En déduire que f est une isométrie sur V.

(iv) Conclure.

Exercice 1.6 Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une application de classe C^2. On note $P(x, \lambda) = \det(\lambda I - M(x))$. On suppose que les valeurs propres de $M(0)$ sont réelles et on fixe λ_0 une de ces valeurs propres. On suppose que

$$\partial_\lambda P(0, \lambda_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_x P(0, \lambda_0) < 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_\lambda^2 P(0, \lambda_0) > 0.$$

(En particulier, λ_0 est une valeur propre double de $M(0)$.)

On souhaite décrire le spectre (réel) de $M(x)$ au voisinage de $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$.

(i) Montrer qu'il existe un voisinage I de 0, un voisinage J de λ_0 et une application $f : J \to I$ de classe C^2 telle que, pour tous $(x, \lambda) \in I \times J$,
$$(P(x, \lambda) = 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x = f(\lambda)).$$

(ii) Montrer que $f'(\lambda_0) = 0$ et $f''(\lambda_0) > 0$.

(iii) On note f_+ la restriction de f à $J \cap [\lambda_0; +\infty[$ et f_- sa restriction à $J \cap]-\infty; \lambda_0]$. Montrer que, quitte à prendre I et J un peu plus petits, on peut supposer que les images de f_+ et f_- sont des intervalles de $\mathbb{R}^+$ contenant 0 et que f_+ et f_- réalisent des bijections vers ces images.

(iv) Montrer que, pour tout x au voisinage de 0,

- si $x < 0$, alors $M(x)$ n'a pas de valeur propre dans J ;
- si $x = 0$, alors λ_0 est l'unique valeur propre de $M(x)$ dans J ;
- si $x > 0$, alors $M(x)$ a exactement deux valeurs propres dans J, qui sont $f_-^{-1}(x)$ et $f_+^{-1}(x)$.

Exercice 1.7 Soient U, V et W trois ouverts d'espaces de Banach E, F et G respectivement. On suppose que $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des immersions (respectivement des submersions). Que peut-on dire de $g \circ f$?

Exercice 1.8 Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est de rang constant r au voisinage de 0 (i.e., $\dim(Im(df(x))) = r$ pour tout x dans un voisinage de 0). On veut prouver qu'il existe deux difféomorphismes locaux ϕ et ψ, ϕ dans $\mathbb{R}^n$ et ψ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\phi(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$, tels que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ assez proche de 0,

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots 0).$$

(i) Justifier qu'on peut supposer que $df(0)$ est l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p.$$

(ii) Notons $\pi : (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p \to (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r$. En appliquant à $\pi \circ f$ le théorème de forme normale des submersions, montrer qu'il existe un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^n$, défini sur un voisinage U_0 de 0, tel que $\phi(0) = 0$, et une application $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p-r}$ de classe C^1 vérifiant

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in U_0, \quad f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, \gamma(x_1, \ldots, x_n)).$$

(iii) Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in U_0$, calculer la matrice jacobienne de $f \circ \phi$ en fonction de celle de γ.

(iv) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ assez proche de 0,

$$\partial_{x_{r+1}} \gamma(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = \partial_{x_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

(v) En déduire que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ assez proche de 0,

$$f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = f \circ \phi(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

(vi) Appliquer le théorème de forme normale des immersions à

$$(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r \to f \circ \phi(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

et conclure.

Exercice 1.9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et de rang constant égal à 1 (c'est-à-dire que $\dim(Im(df(x, y))) = 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). On suppose que $f(x, 0) = (x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un voisinage V de $(x, 0)$ avec $f(V) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. À l'aide de l'exercice précédent, montrer qu'il existe des voisinages V_1, V_2 de $(x, 0)$ et des applications C^1, $\phi : V_1 \to \mathbb{R}^2, \psi : V_2 \to \mathbb{R}^2$, telles que

- $\phi(x, 0) = \psi(x, 0) = (x, 0)$;
- ϕ et ψ sont des C^1-difféomorphismes vers leurs images ;
- pout tout $(y_1, y_2) \in V_1$, $\psi \circ f \circ \phi(y_1, y_2) = (y_1, 0)$.

(ii) En déduire qu'il existe des voisinages V_3, V_4 de $(x, 0)$ et des applications C^1, $\lambda : V_3 \to \mathbb{R}, \mu : V_4 \to \mathbb{R}^2$ telles que

- $\lambda(x, 0) = x$ et $\mu(x, 0) = (x, 0)$;
- pour tout $(y_1, y_2) \in V_3$, $f(y_1, y_2) = \mu(\lambda(y_1, y_2), 0)$.

(iii) Montrer que l'application $z \to \lambda(z, 0)$ est inversible au voisinage de x. En déduire que, pour tout (y_1, y_2) assez proche de $(x, 0)$, il existe z tel que

$$\lambda(y_1, y_2) = \lambda(z, 0).$$

(iv) En déduire que, pour tout (y_1, y_2) assez proche de $(x, 0)$, il existe z tel que $f(y_1, y_2) = (z, 0)$ et conclure.

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1 Sous-variétés générales

Exercice 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0 et de dimension n.

Exercice 2.2 Soit M_1 (resp. M_2) une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{n_2}$) de dimension m_1 (resp. m_2) où $n_1, n_2 \geq 1$. Montrer que $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et déterminer sa dimension. En déduire que $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 (où S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2.3 Montrer que $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa dimension.

Exercice 2.4 (Plongement de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$) On considère, dans $\mathbb{R}^3$, la partie

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2 = 1\}.$$

(i) Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$; préciser sa dimension.

(ii) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(\phi, \theta) = ((2 + \cos(\phi)) \cos(\theta), (2 + \cos(\phi)) \sin(\theta), \sin(\phi)).$$

Montrer que $M = g(\mathbb{R}^2)$.

(iii) En déduire un difféomorphisme entre M et $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

(iv) Essayer de dessiner M.

Exercice 2.5 On fixe un nombre $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et on définit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ (avec des notations complexes) par

$$\gamma(t) = (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi ct})$$

où $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(i) Montrer que γ est une immersion en tout point de $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $\gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.
[On rappelle que, pour tout nombre irrationnel x, $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.]

(iii) L'ensemble $\gamma(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2.6 On considère l'application de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

(i) Montrer que f est une immersion de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞.

(ii) Montrer que f est injective.

(iii) Montrer que $f\left(\frac{1}{t}\right) = (3t^2, 3t) + o(t^2)$ lorsque $t \to 0$.

(iv) Soit $\epsilon \in]0; 1[$ quelconque. Montrer que, pour tout t tel que $\epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$,

$$f(t) \notin\ ]-\epsilon; \epsilon[\times \mathbb{R}.$$

(v) Dessiner l'allure de $f(\mathbb{R})$ au voisinage de $f(0)$.

(vi) Montrer que $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.7 (Les variétés SL_n et O_n) Dans $M_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices réelles de format $n \times n$, vu comme $\mathbb{R}^{n\times n}$), on note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles, $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 et $O_n(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales. Soit $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

On rappelle que $\det(\exp(M)) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$ et que $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent.

(i) Montrer que exp est différentiable en 0 et calculer $d\exp(0)$.

(ii) Vérifier que exp est un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 de $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr(M)} = 0\}$. Montrer que la restriction à E de exp réalise une bijection entre un voisinage de 0 de E et un voisinage de I_n dans $SL_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en 0 est injective.

(iv) En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent au point I_n

[Indication : on pourra fixer M dans $SL_n(\mathbb{R})$ et utiliser l'application $X \to M\exp(X)$.]

(iv) Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ M + M^T = 0\}$. Montrer de même que la restriction de exp à F réalise une bijection entre un voisinage de 0 de F et un voisinage de I_n dans $O_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en 0 est injective.

(v) En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent au point I_n.

2.2 Espace tangent

Exercice 2.8 Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.

Soient M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1}$ et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_2}$. On a vu à l'exercice 2.2 que $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Exprimer son espace tangent en un point $x = (x_1, x_2)$ en fonction de $T_{x_1}M_1$ et $T_{x_2}M_2$.

Exercice 2.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer, en tout point, l'espace tangent de la sphère

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 = 1\}$$

et du tore

$$\mathbb{T}^n = (S^1)^n \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Exercice 2.10 Soit $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2 + y^2 - z^2$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on définit

$$E_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = c\}.$$

(i) Pour tout $c \neq 0$, montrer que E_c est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Préciser son espace tangent en tout point.

(ii) On va maintenant montrer que E_0 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Par l'absurde, on suppose qu'il s'agit d'une sous-variété.

Montrer que les points $(1, 0, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont dans $T_{(0,0,0)}E_0$.

(iii) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Montrer que, si $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$, alors il existe $t \in I$ tel que $\gamma(t) \notin E_0$.

(iv) Déduire de la question précédente que $(1, 0, 0)$ n'est pas dans $T_{(0,0,0)}E_0$, puis conclure.

Exercice 2.11 Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4xy + 2xz + 4y - z = xy + 2x - z = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera la dimension et l'espace tangent en $(0, 0, 0)$.

Exercice 2.12 Soient M, N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, d'intersection non-vide.

(i) Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, on a $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^n$, alors $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera la dimension en fonction de celles de M et N.

(ii) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.13 (i) Soit U un ouvert d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$. Montrer que U est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dont on donnera la dimension et l'espace tangent en tout point.

(ii) Soient $0 < p < n$ des entiers. Quelles sont les sous-variétés connexes M de dimension p de $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles l'espace tangent T_xM est indépendant de x ?

Exercice 2.14 Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ (muni de la loi multiplicative). On pose

$$\mathcal{G} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

[Note : Si les deux premières questions de l'énoncé semblent trop difficiles, on peut admettre le résultat de la question (ii) et commencer l'exercice à la question (iii).]

(i) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ quelconques. Montrer qu'il existe une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n assez grand,

$$e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} = e^{C_n},$$

et $C_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Montrer que $nC_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A + B$ et en déduire que

$$\left(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}}\right)^n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{A+B}.$$

(iii) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(iv) Montrer que G est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de I_n tel que $G \cap U$ soit une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

[Indication : introduire, pour toute $X \in G$, l'application $m_X : Y \in M_n(\mathbb{R}) \to XY \in M_n(\mathbb{R})$].

(v) Soit $\mathcal{H}$ un supplémentaire de $\mathcal{G}$. Tout élément $X \in M_n(\mathbb{R})$ sera écrit de manière unique sous la forme $X = G + H$ avec $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$. On introduit

$$\phi : X = G + H \in M_n(\mathbb{R}) \to e^G e^H \in M_n(\mathbb{R}).$$

Calculer $\phi(0)$ puis montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que ϕ réalise un C^∞-difféomorphisme de V vers $\phi(V)$.

(vi) Montrer que, pour tout ouvert $U \subset V$, $\phi(U \cap \mathcal{G}) \subset G \cap \phi(U)$.

(vii) On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0, inclus dans V, tel que $\phi(U \cap \mathcal{G}) = G \cap \phi(U)$. Par l'absurde, on suppose qu'un tel U n'existe pas. Montrer qu'il existe $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non-nuls de $\mathcal{H}$ telle que

$$||H_n|| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{H_n} \in G.$$

(viii) Pour tout n, on pose

$$m_n = \left\lfloor \frac{1}{||H_n||} \right\rfloor \quad \text{et} \quad h_n = m_n H_n.$$

Justifier que, quitte à remplacer $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite, on peut supposer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $h_\infty \in \mathcal{H}$ telle que $||h_\infty|| = 1$.

(ix) Montrer que $e^{h_\infty} \in G$ puis, plus généralement, que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{th_\infty} \in G$.

(x) Déduire de la question précédente qu'il existe un voisinage ouvert U de 0, inclus dans V, tel que $\phi(U \cap \mathcal{G}) = G \cap \phi(U)$.

(xi) Montrer que G est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, de même dimension que $\mathcal{G}$.

(xii) Quel est l'espace tangent à G en I_n ?

2.3 Courbes

Exercice 2.15 (Cycloïde) Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe des abscisses. La figure décrite par un point de ce cercle est appelée une cycloïde.

(i) Trouver une courbe paramétrée décrivant la cycloïde.

(ii) Déterminer la longueur complète de la courbe lorsque le cercle a effectué un tour complet.

Exercice 2.16 Définissons

$$\gamma : t \in]0;1] \to \left(t, t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la longueur de la courbe décrite par γ entre $t = 1/(n+1)$ et $t = 1/n$ est au moins égale à $(2n+1)/(n(n+1))$.

(ii) En déduire que la longueur de la courbe entre $t = 0$ et $t = 1$ est infinie.

Exercice 2.17 Soient $A = (I, x)$ et $B = (I, y)$ deux arcs de $\mathbb{R}^n$ de classe C^3, paramétrés par abscisse curviligne. On suppose que $K_A(t) < K_B(t)$ pour un $t \in I$ (où $K_A(t)$ et $K_B(t)$ sont les courbures à A et à B en $x(t)$ et $y(t)$ respectivement). Montrer que, pour tout $s \in I$ suffisamment proche de t, on a

$$\|x(t) - x(s)\| > \|y(t) - y(s)\|.$$

Exercice 2.18 Soit $A = ([a;b], \gamma)$ une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$, de classe C^2, paramétrée par abscisse curviligne. (On a donc $\gamma(a) = \gamma(b), \gamma'(a) = \gamma'(b), \gamma''(a) = \gamma''(b)$.)

Pour tout t, on note $\tau(t) = \gamma'(t)$ le vecteur tangent à A en $\gamma(t)$ et $N(t)$ un vecteur unitaire tel que $(\tau(t), N(t))$ forme une base orthonormée *directe*.

(i) Montrer que, pour tout t, il existe $\overline{K}_A(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau'(t) = \overline{K}_A(t) N(t).$$

On appelle $\overline{K}_A(t)$ la *courbure algébrique* de A au point $\gamma(t)$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer un résultat énoncé dans le cours :

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = 2\pi \text{ ou } -2\pi.$$

On note γ_1 la première coordonnée de γ et on fixe $t_0 \in [a;b]$ tel que

$$\gamma_1(t_0) = \min_{t \in [a;b]} \gamma_1(t).$$

(ii) Justifier qu'on peut supposer $t_0 = a$. On fera cette hypothèse dans la suite.

(iii) Montrer que $\tau(a) = (0, -1)$ ou $\tau(a) = (0, 1)$. Dans la suite, on supposera que $\tau(a) = (0, -1)$.

Pour tout t, $\tau(t)$ est un élément de S^1. Il peut donc s'écrire, en notation complexe, $e^{i\phi(t)}$ pour un certain réel $\phi(t)$. On fixe pour la suite de tels réels $\phi(t)$ et on admet qu'on peut le faire de sorte que la fonction $\phi : [a;b] \to \mathbb{R}$ ainsi définie soit C^1.

(iv) Exprimer N et $\overline{K}_A$ en fonction de ϕ et ϕ'. En déduire que

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Soit $E = \{(t_1, t_2) \in [a; b], t_1 \leq t_2\}$. Pour tout $(t_1, t_2) \in E$, on définit

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2) &= \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||} && \text{si } t_1 \neq t_2 \text{ et } (t_1, t_2) \neq (a, b), \\ &= \tau(t_1) && \text{si } t_1 = t_2, \\ &= -\tau(a) && \text{si } (t_1, t_2) = (a, b). \end{aligned}$$

(v) Montrer que S est une application continue à valeurs dans S^1.

Pour tout $(t_1, t_2) \in E$, on fixe $\psi(t_1, t_2)$ de sorte que

$$S(t_1, t_2) = e^{i\psi(t_1, t_2)}.$$

On admet qu'on peut choisir les réels $\psi(t_1, t_2)$ de sorte que ψ soit une fonction continue.

(vi) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in [a; b]$,

$$\psi(t, t) = \phi(t) + 2\pi n.$$

En déduire que

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = \psi(b, b) - \psi(a, a).$$

(vii) Montrer que, pour tout $t \in [a; b[$, $\psi(a, t) - \psi(a, a) \in [0; \pi]$. En déduire que

$$\psi(a, b) - \psi(a, a) = \pi.$$

(viii) Montrer que $\psi(b, b) - \psi(a, b) = \pi$ et conclure.

Exercice 2.19 Soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$, de classe C^2, de courbure constante égale à 1.

(i) Montrer que γ décrit un arc d'un cercle de rayon 1.

(ii) Est-ce encore vrai si (I, γ) n'est plus un arc de $\mathbb{R}^2$ mais de $\mathbb{R}^3$?

2.4 Surfaces

Exercice 2.20 (Hyperboloïde à une nappe) Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

(i) Montrer que Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

(ii) Calculer une application de Gauss $\nu : \Sigma \to S^2$.

Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ quelconque. On va calculer la courbure de Σ en p_0.

(iii) Soit pour cette question $X = (h, k, l) \in T_{p_0}\Sigma$ quelconque. Soit $\gamma : I \to \Sigma$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0) une application de classe C^1 telle que

$$\gamma'(0) = (h, k, l).$$

Montrer que (quitte à remplacer ν par $-\nu$)

$$(\nu \circ \gamma)'(0) = \frac{1}{||p_0||}(h, k, -l) - \left(\frac{hx_0 + ky_0 + lz_0}{||p_0||^3}\right)(x_0, y_0, -z_0).$$

(iv) En déduire que, pour tous $X = (h, k, l), X' = (h', k', l') \in T_{p_0}\Sigma$, on a

$$II_{p_0}(X, X') = \frac{-hh' - kk' + ll'}{||p_0||}.$$

(v) Vérifier que les vecteurs

$$e_1 = \frac{(y_0, -x_0, 0)}{\sqrt{1 + z_0^2}} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{(x_0 z_0, y_0 z_0, -(1 + z_0^2))}{\sqrt{(1 + z_0^2)(1 + 2z_0^2)}}.$$

forment une base orthonormée de $T_{p_0}\Sigma$.

(vi) Calculer la matrice associée à la forme bilinéaire II_{p_0} dans cette base et montrer que la courbure en p_0 vaut

$$-\frac{1}{(1 + 2z_0^2)^2}.$$

Exercice 2.21 (Géodésiques) Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'un arc paramétré régulier (I, γ) de Σ est une géodésique de Σ si γ est de classe C^2 et si $\gamma''(s) \in (T_{\gamma(s)}\Sigma)^\perp$ pour tout $s \in I$.

1. Montrer que toute géodésique (I, γ) est parcourue à vitesse constante : $\|\gamma'(s)\|$ est indépendant de s.

2. Soit (I, γ) une géodésique de la sphère $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\}$.

   (i) Montrer que, pour tout $t \in I$, $\gamma''(t)$ est colinéaire à $\gamma(t)$.

   (ii) Pour tout $t \in I$, on note $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ et on définit

   $$V(t) = \begin{pmatrix} \gamma_2(t)\gamma_3'(t) - \gamma_3(t)\gamma_2'(t) \\ \gamma_3(t)\gamma_1'(t) - \gamma_1(t)\gamma_3'(t) \\ \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

   Montrer que, pour tout $t \in I$, $V(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$.

   (iii) Montrer que V est constante.

   (iv) En déduire que $\{\gamma(t),\ t \in I\}$ est inclus dans un plan passant par 0.

3. Soient (U, f) des coordonnées locales de Σ et ν une application de Gauss. On suppose que f est de classe C^3.

   On note, pour tout $x \in U$,

$$V^k(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

   On rappelle que, pour tout x, $\big(V^1(x), V^2(x)\big)$ est une base de $T_{f(x)}\Sigma$ et $\big(V^1(x), V^2(x), \nu(x)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Pour $i, j \in \{1, 2\}$, on note $(\Gamma^1_{ij}(x), \Gamma^2_{ij}(x), a_{ij}(x))$ les coefficients dans cette base de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \Gamma^1_{ij}(x)V^1(x) + \Gamma^2_{ij}(x)V^2(x) + a_{ij}(x)\nu(x).$$

   Soit (I, c) un arc paramétré régulier de classe C^2 dans U. On pose $\gamma = f \circ c$.

   (i) Montrer que, pour tout $t \in I$,

$$\gamma''(t) = \sum_{i,j=1,2} c_i'(t)c_j'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{k=1,2} c_k''(t)V^k(c(t)).$$

   (ii) En déduire que γ est une géodésique de Σ si et seulement si, pour tout $t \in I$ et pour tout $k \in \{1, 2\}$,

$$c_k''(t) = -\sum_{i,j=1,2} c_i'(t)c_j'(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)).$$

4. En déduire qu'étant donné un couple $(x_0, v_0) \in U \times \mathbb{R}^2$, il existe un unique arc paramétré maximal (I, c) avec $c(0) = x_0$ et $c'(0) = v_0$ tel que $\gamma := f \circ c$ soit une géodésique de Σ.

Exercice 2.22 On dit que deux surfaces S_1 et S_2 de $\mathbb{R}^3$ sont isométriques au voisinage de deux points $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$ s'il existe des coordonnées locales (U, f) pour S_1 et (V, g) pour S_2 telles que $f(z_0) = \bar{x}_1, g(z_0) = \bar{x}_2$ pour un certain $z_0 \in U \cap V$ et

$$\alpha_f = \alpha_g \text{ sur } U \cap V.$$

Le Theorema Egregium de Gauss affirme qu'alors, S_1 et S_2 ont la même courbure K :

$$\forall x \in U \cap V, \quad K_{S_1}(f(x)) = K_{S_2}(g(x)).$$

1. Montrer que le cylindre (paramétré par $(u, v) \to (\cos(u), \sin(u), v)$) et le plan sont isométriques en tout point. Quelle est leur courbure ?

   On va montrer à l'inverse que la nappe S_1 paramétrée par

$$f : (u, v) \to (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u)) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi, \pi[)$$

   et l'hélicoïde S_2 paramétré par

$$g : (u, v) \to (u\cos(v), u\sin(v), v) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi, \pi[)$$

   ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

2. (i) Pour tout (u,v), calculer $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$. Montrer que

$$(e_1, e_2) \stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right)$$

forme une base orthonormale de $T_{f(u,v)}S_1$.

(ii) Soit ν^{S_1} une application de Gauss de S_1 (c'est-à-dire une application continue à images dans S^2, telle que pour tout p, $\nu_p^{S_1} \in T_pS_1^{\perp}$). Calculer, pour tout (u,v), $\nu_{f(u,v)}^{S_1}$ (au signe près).

(iii) Soit (u,v) fixé. On définit

$$\forall t \in]-u:+\infty[, \quad \gamma(t) = f(u+t, v);$$
$$\forall t \in]-v-\pi; -v+\pi[, \quad \delta(t) = f(u, v+t).$$

Montrer que

$$(\nu^{S_1} \circ \gamma)'(0) = -\frac{e_1}{1+u^2};$$
$$(\nu^{S_1} \circ \delta)'(0) = \frac{e_2}{\sqrt{1+u^2}}.$$

(iv) En déduire la matrice, dans la base (e_1, e_2), de la seconde forme fondamentale $II_{f(u,v)}$. Montrer que la courbure de S^1 en $f(u,v)$ est

$$K_{S_1}(f(u,v)) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}.$$

3. Montrer que, pour tous u, v,

$$K_{S_2}(g(u,v)) = -\frac{1}{(1+u^2)^2} = K_{S_1}(f(u,v)).$$

4. On va maintenant montrer qu'il n'existe aucune isométrie entre S_1 et S_2. Supposons par l'absurde qu'il existe des coordonnées locales (U,F) pour S_1 et (V,G) pour S_2 telles que $U \cap V \neq \emptyset$ et

$$\alpha_F = \alpha_G \text{ sur } U \cap V.$$

(i) On suppose d'abord que $F = f$ et que $G = g \circ \phi$ pour un certain difféomorphisme $\phi : V \to V' \subset \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[$. On note ϕ_1, ϕ_2 les coordonnées de ϕ. Montrer que

$$\forall (u,v) \in U \cap V, \quad \phi_1(u,v) = u.$$

[Indication : utiliser la question 3 et le Theorema Egregium.]

(ii) Calculer α_f et, en fonction de ϕ_2 et de ses dérivées, α_G.

(iii) Aboutir à une contradiction.

(iv) Aboutir au même résultat sans supposer que $F = f$ et $G = g \circ \phi$.

3 Equations différentielles

3.1 Cauchy-Lipschitz

Exercice 3.1 (Solution maximale non unique en dimension finie) Soit $f : x \to \sqrt{|x|}$.

(i) f est-elle localement lipschitzienne en 0 ?

(ii) Trouver toutes les solutions maximales (I, x) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \quad \forall t \in I, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

[Indication : procéder par analyse-synthèse. Pour l'analyse, considérer une solution maximale (I, x) et définir $I^- = \{t \in I, x(t) < 0\}$ et $I^+ = \{t \in I, x(t) > 0\}$. Vérifier que

$$(\sqrt{-x})' = -\frac{1}{2} \text{ sur } I^+,$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \text{ sur } I^-.$$

En déduire que I^- est un intervalle, vide ou de la forme $]-\infty; a[$ et que I^+ est un intervalle, vide ou de la forme $]b; +\infty[$.]

Exercice 3.2 (Non existence en dimension infinie) Soit E l'espace des suites réelles tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (c'est un sous-ensemble fermé de $L^\infty(\mathbb{N})$, donc un Banach) et $f : E \to E$ défini par

$$f(x) = y, \qquad \text{où } y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Montrer que f est continue sur E.

(ii) On suppose que $t \to x(t)$ est une solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = 0_E$$

sur un intervalle $[0, a]$ $(a > 0)$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, a]$,

$$x_n(t) > 0 \text{ et } \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} > 1.$$

(iii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, a]$, $x_n(t) \geq t^2/4$ et conclure.

Exercice 3.3 (Hadamard-Lévy) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. On suppose que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et qu'il existe des constantes $A, B \geq 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|(df(x))^{-1}\| \leq A\|x\| + B.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

(i) Dans cette question et la suivante, on suppose qu'il existe une application continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Montrer que l'image de g est ouverte.

[Indication : utiliser le théorème d'inversion locale.]

(ii) Montrer que l'image de g est fermée et en déduire que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

À partir de maintenant, on ne suppose plus l'existence de g. Étant donné $x \in \mathbb{R}^n$, on note y^x la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (df(y(t)))^{-1}x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On note I^x son intervalle de définition.

(iii) Pour tout x, on note $M^x = ||y^x||$. Montrer que, pour tout $t \in I^x \cap \mathbb{R}^+$,

$$M^x(t) \leq B||x||t + \int_0^t A||x||M^x(s)ds.$$

En déduire que, pour tout $t \in I^x \cap \mathbb{R}^+$,

$$M^x(t) \leq \frac{B}{A}\left(e^{A||x||t} - 1\right).$$

(iv) Montrer que, pour tout x, $\mathbb{R}^+ \subset I^x$.

(v) Soit $R > 0$ quelconque. On note $R' = \frac{B}{A}\left(e^{A||x||R} - 1\right)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $h, l \in B_{\mathbb{R}^n}(0, R')$,

$$||(df(h))^{-1} - (df(l))^{-1}|| \leq C||h - l||.$$

(vi) Soient $x, z \in B(0, R)$ quelconques. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$y^x(t), y^z(t) \in B_{\mathbb{R}^n}(0, R'),$$
$$||(y^x - y^z)'(t)|| \leq C||x||\,||(y^x - y^z)(t)|| + (AR' + B)||z - x||.$$

(vii) En déduire que l'application $x \to y^x(1)$ est lipschitzienne sur $B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^n$.

[Indication : Poser $M^{x,z} = ||y^x - y^z||$ et procéder de manière similaire à la question (i).]

(viii) Calculer $f \circ y^x(t)$ pour tout $t \in I^x$. En déduire l'existence d'une application continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

(ix) Conclure.

Exercice 3.4 Soit $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*_+)$ telle que $\|f(t, x)\| \leq F(\|x\|)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty.$$

Soit (I, x) la solution maximale du problème de Cauchy associé à f, pour une donnée initiale x_0 :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(i) Soit $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la primitive de $\frac{1}{F}$ telle que $G(0) = 0$. Quel est son sens de variation ? Quelle est sa limite en $+\infty$?

(ii) On note $r(t) = \|x(t)\|$ et $\Omega = \{t \in I \cap \mathbb{R}^+, r(t) > 0\}$. Montrer que r est dérivable sur Ω et que, pour tout $t \in \Omega$,

$$(G \circ r)'(t) \leq 1.$$

(iii) Montrer que, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$G \circ r(t) \leq G(||x_0||) + t.$$

(iv) En déduire que la solution (I, x) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : $I = \mathbb{R}$.

3.2 Flots

Exercice 3.5 Pour $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = x^{4/3}(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution maximale.

2. Calculer cette solution si $x_0 = 0$.

3. On suppose maintenant $x_0 \neq 0$ et on note (I, x) la solution maximale. Montrer que x ne s'annule pas.

4. Calculer I et x. En déduire l'expression du flot associé à l'équation différentielle.

Exercice 3.6 (Application de Poincaré) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on travaille dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et on note $x = (x', x_{d+1})$ les éléments de cet espace. Si $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, on définit $\pi(x) = x'$ la projection de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ un champ de vecteurs de classe C^2 que l'on supposera à croissance au plus linéaire : il existe $A, B > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$||f(x)|| \leq A||x|| + B.$$

En utilisant l'exercice 3.4, on peut montrer que, pour tous t_0, x_0, l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note $(t, x) \to \phi^{t_0}(t, x)$ le flot correspondant.

On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $\phi^0(T, 0) = 0$ et que $f_{d+1}(0) \neq 0$ (où $f = (f_1, \ldots, f_{d+1})$).

1. Vérifier que la solution $t \to \phi^0(t, 0)$ est T-périodique.

2. On considère l'application $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$h(x', t) = (\phi^0(t, (x', 0)))_{d+1}$$

   Montrer que $\frac{\partial h}{\partial t}(0, T) \neq 0$ et en déduire qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ contenant $(0, T)$ et une application $\tau : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\tau(0) = T$ et, pour tout $(x', t) \in \mathcal{V}$,

   $$(\phi^0(t, (x', 0)))_{d+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x' \in \mathcal{O} \text{ et } t = \tau(x').$$

   L'application de Poincaré $P : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^d$ est définie par $P(x') = \pi(\phi^0(\tau(x'), (x', 0)))$. Noter que P est de classe C^1.

3. On suppose que $P(x') = x'$ pour un certain $x' \in \mathcal{O}$. Montrer que la solution $t \to \phi^0(t, (x', 0))$ est périodique.

4. (Plus difficile) On suppose que $\|dP(0)\| < 1$. ($\| \cdot \|$ est la norme opérateur).

   (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\rho \in]0; 1[$ tels que $B(0, r) \subset \mathcal{O}$ et P est ρ-lipschitzienne sur $B(0, r)$.

   (b) Que vaut $P(0)$?

   (c) Soit $x' \in B(0, r)$. Montrer que $||P^k(x')|| \leq \rho^k ||x'||$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer qu'il existe $\delta_{x'} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tau(P^k(x')) = nT + \delta_{x'} + o(1), \quad n \to +\infty$$

(e) Montrer par récurrence que, pour tout n, $\phi^0\left(\sum_{k=0}^{n-1} \tau(P^k(x')), (x', 0)\right) = (P^n(x'), 0)$ et en déduire que

$$\phi^0(nT + \delta_{x'}, (x', 0)) - \phi^0(nT, 0) = \phi^0(nT + \delta_{x'}, (x', 0)) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(f) Montrer que

$$\phi^0(t, (x', 0)) - \phi^0(t - \delta_{x'}, 0) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.3 Équations de transport

Exercice 3.7 Résoudre l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,y) - \partial_x f(t,x,y) + y\partial_y f(t,x,y) = (x-t)ye^{t(x-1)}, & \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^3, \\ f(0,x,y) = y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Exercice 3.8 On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) - 3\partial_{tx}^2 u(t,x) - 4\partial_{xx}^2 u(t,x) = 0, & \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2,\ \partial_x u(0,x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(i) Soit $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que

$$(\partial_t - 4\partial_x)((\partial_t + \partial_x)u)(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x) - 3\partial_{tx}^2 u(t,x) - 4\partial_{xx}^2 u(t,x).$$

(ii) Trouver toutes les fonctions $v : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$(\partial_t - 4\partial_x)v(t,x) = 0, \qquad \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$

(iii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 quelconque. Trouver toutes les solutions w de classe C^1 de

$$(\partial_t + \partial_x)w(t,x) = f(4t+x)$$

(on pourra faire le changement de variables $x' = 4t + x$, $t' = x - t$ et déterminer l'équation satisfaite par $\tilde{w}(t',x') := w(t,x)$).

(iv) Déterminer la solution du problème initial.

Exercice 3.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On considère l'équation suivante, d'inconnue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$a_1(x)\partial_{x_1} u(x) + \cdots + a_n(x)\partial_{x_n} u(x) = 0, \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{E}$$

On appelle *équation des caractéristiques* l'équation suivante, d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$\dot{X}(t) = (a_1(X(t)), \dots, a_n(X(t))), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{Car}$$

On note $(t_0, t, x_0) \to \Phi^{t_0}(t, x_0)$ le flot associé.

(i) Montrer qu'une application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est solution de (E) si et seulement si, pour tous $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$t \to u(\Phi^{t_0}(t, x_0))$$

est constante.

(ii) Pour $n = 2$, on considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u(x_1,x_2) + 2x_1\partial_{x_2} u(x_1,x_2) = 0, & \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,x_2) = x_2, \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

À l'aide de la question précédente, montrer qu'elle a une unique solution de classe C^1. Calculer celle-ci.

(iii) Montrer en revanche que l'équation

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u(x_1,x_2) + 2x_1\partial_{x_2} u(x_1,x_2) = 0, & \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x_1,0) = f(x_1), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

n'a pas de solution si f est l'application $f(x_1) = x_1$ et qu'elle en a une infinité si f est l'application $f(x_1) = 1$.

3.4 Équations différentielles linéaires

Exercice 3.10 (i) Dessiner quelques solutions de l'équation

$$\begin{cases} x'(t) & = -3x(t) + y(t), \\ y'(t) & = x(t) - 3y(t). \end{cases}$$

(ii) Même question pour l'équation

$$\begin{cases} x'(t) & = -x(t) + y(t), \\ y'(t) & = -x(t) - y(t). \end{cases}$$

Exercice 3.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On considère l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$x''(t) - x(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(i) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x'' - x = 0$.

(ii) Montrer que l'équation (1) admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$. On se propose de calculer cette solution.

(iii) On définit $u = (x, x')$. Montrer que x est solution de l'équation (1) si et seulement si x est solution d'un système de la forme $u'(t) = Au(t) + F(t)$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continue, que l'on explicitera.

(iv) Calculer e^{tA} et en déduire qu'une fonction x de classe C^2 est solution de l'équation de départ si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$x(t) = ae^t + be^{-t} + \int_0^t sh(t - \tau) f(\tau) d\tau, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(où $sh : t \to \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ est le sinus hyperbolique).

(v) On fixe $L > 0$. Trouver a_L et b_L pour que $x(L) = x(-L) = 0$. Montrer que les coefficients a_L et b_L ont des limites quand $L \to +\infty$.

(vi) Montrer que l'unique solution bornée cherchée s'écrit

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s) ds + \int_t^{+\infty} e^{t-s} f(s) ds\right), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.12 Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $M : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} M'(t) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} M(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ M(0) & = & I_2. \end{cases}$$

Comparer la solution avec

$$t \to \exp\left(\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-s} & -1 \end{pmatrix} ds\right).$$

3.5 Stabilité

Exercice 3.13 On définit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (-y+xy, x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)). \end{array}$$

On considère l'équation différentielle associée

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -y+xy, \\ y' = x+\frac{1}{2}(x^2-y^2). \end{array} \right.$$

1. Déterminer tous les équilibres du système. Lesquels sont hyperboliques ?

2. On considère la droite
$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\}.$$
   (i) Pour tous $y_0, t_0 \in \mathbb{R}$, montrer que l'équation différentielle
$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = \frac{3}{2} - \frac{Y^2}{2}, \\ Y(t_0) = y_0. \end{array} \right.$$
   a une unique solution maximale, qu'on note $(Y_{t_0,y_0}, I_{t_0,y_0})$.

   (ii) Montrer que, pour tout t, si $(x(t), y(t)) \in \mathcal{D}_1$, alors
$$(x(t'), y(t')) = (1, Y_{t,y(t)}(t')), \quad \text{pour tout } t' \in I_{t,y(t)}.$$
   (iii) En déduire que $\mathcal{D}_1$ est stable par l'équation différentielle, c'est-à-dire que si $(x(t), y(t)) \in \mathcal{D}_1$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, alors $(x(t), y(t)) \in \mathcal{D}_1$ pour tout t.

3. Montrer que les droites
$$\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + \sqrt{3}y = -2\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - \sqrt{3}y = -2\}$$
   sont également stables par l'équation différentielle.

   [Indication : commencer par montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_2$,
$$f(x,y) = \alpha(x,y)(\sqrt{3}, -1).]$$

4. En déduire les variétés stables et instables associées aux points fixes hyperboliques.

5. Montrer que la fonction
$$H : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \to \quad -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} \in \mathbb{R}.$$
   est constante le long du flot.

6. Montrer que H possède un maximum local en $(0,0)$.

7. Déterminer l'allure générale des trajectoires (portrait de phase).

Exercice 3.14 (Variété invariante par un flot) Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $m < n$ de classe C^2 et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^2. L'objectif de cet exercice est de montrer que, si

$$f(t, v) \in T_v M \qquad \forall (t, v) \in \mathbb{R} \times M,$$

alors, pour toute donnée initiale (t_0, v_0) avec $v_0 \in M$, la solution maximale (x, I) du problème de Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v_0 \end{cases}$$

reste dans M : $x(t) \in M$ pour tout $t \in I$.

On notera $dist(v, M)$ la distance d'un point $v \in \mathbb{R}^n$ à M :

$$dist(v, M) = \min_{w \in M} \|v - w\|$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

(i) Soient $v \in \mathbb{R}^n \backslash M$ et $w \in M$ tels que $||v - w|| = \mathrm{dist}(v, M)$. Montrer que $v - w \in (T_w M)^\perp$.

(ii) Soient $v_0 \in M$, V un voisinage ouvert de v_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $h : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ une submersion en v_0 de classe C^2 telle que $V \cap M = h^{-1}(\{0\})$. Montrer que, quitte à réduire V, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$dist(v, M) \leq C|h(v)| \qquad \forall v \in V.$$

[Indication : raisonner par l'absurde. Montrer l'existence d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $V \backslash M$ et d'une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de M telles que

- $g_n, w_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v_0$;
- $\forall n, g_n - w_n \in (T_{w_n} M)^\perp$;
- $\forall n, |h(g_n)| \leq \frac{||g_n - w_n||}{n}$.]

(iii) Soit (x, I) la solution maximale du problème de Cauchy $(\star)$. Déduire de la question précédente l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $t \in I$ proche de t_0, on a

$$\frac{d}{dt}(h(x(t))^2 \leq C'(h(x(t))^2.$$

(iv) Conclure.

Exercice 3.15 (Exercice 2 de l'examen 2019) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2. On suppose que f vérifie les conditions suivantes : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\mathbf{C1}) \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle < 0 \text{ si } x^2+y^2=4 \qquad \text{et} \qquad \langle f(x,y),(x,y)\rangle > 0 \text{ si } x^2+y^2=1$$

ainsi que

$$(\mathbf{C2}) \qquad \langle f(x,y),(-y,x)\rangle > 0 \qquad \text{si } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4.$$

Etant donné $r \in [1,2]$, on considère la solution maximale $(I^r,(x^r,y^r))$ de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} (\dot{x}(t),\dot{y}(t)) = f(x(t),y(t)) & t \in I \\ (x(0),y(0)) = (r,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $R(t,r) := \sqrt{(x^r(t))^2+(y^r(t))^2}$ vérifie :

$$R(t,r) \in [1,2] \qquad \forall t \in I^r,\ t \geq 0.$$

   (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\frac{d}{dt}(R(t,r))^2$ au temps t où $R(\cdot,r)$ sort de l'intervalle $]1,2[$).

2. Déduire de la question précédente que $[0,+\infty[\subset I^r$.

   Soit
$$\Theta(t,r) = \int_0^t \frac{\langle f(x^r(s),y^r(s)),(-y^r(s),x^r(s))\rangle}{(R(s,r))^2}ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

3. Montrer que

$$(x^r(t),y^r(t)) = R(t,r)(\cos(\Theta(t,r)),\sin(\Theta(t,r))) \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

   [Attention, cette question n'est pas évidente ; elle mériterait une indication.]

4. Montrer que $R : \mathbb{R}^+ \times [1,2] \to \mathbb{R}$ et $\Theta : \mathbb{R}^+ \times [1,2] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1.

5. Montrer que, pour tout $r \in [1,2]$ il existe un unique $\tau(r) \geq 0$ tel que $\Theta(\tau(r),r) = 2\pi$.

6. Montrer que l'application $r \to \tau(r)$ est continue dans $[1,2]$.

7. On pose $P(r) = R(\tau(r),r)$. Montrer que P est continue et en déduire l'existence de $\bar{r} \in [1,2]$ point fixe de P.

8. Conclure que l'équation différentielle (*) possède au moins une solution périodique.