Corrigé de l'exercice 1.6

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une application de classe C^2. On note $P(x,\lambda) = \det(\lambda I - M(x))$. On suppose que les valeurs propres de $M(0)$ sont réelles et on fixe λ_0 une de ces valeurs propres. On suppose que

$$\partial_\lambda P(0,\lambda_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_x P(0,\lambda_0) < 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_\lambda^2 P(0,\lambda_0) > 0.$$

(En particulier, λ_0 est une valeur propre double de $M(0)$.)
On souhaite décrire le spectre (réel) de $M(x)$ au voisinage de $(x,\lambda) = (0,\lambda_0)$.

(i) Montrer qu'il existe un voisinage I de 0, un voisinage J de λ_0 et une application $f : J \to I$ de classe C^2 telle que, pour tous $(x,\lambda) \in I \times J$,

$$(P(x,\lambda) = 0) \qquad \iff \qquad (x = f(\lambda)).$$

D'après l'énoncé, $\partial_x P(0,\lambda_0) \neq 0$ (c'est-à-dire que la différentielle de P par rapport à x en $(0,\lambda_0)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$). D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0, un ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant λ_0 et une fonction $f : J \to I$ de classe C^2 telle que, pour tout $(x,\lambda) \in I \times J$,

$$(P(x,\lambda) = 0) \iff (x = f(\lambda)).$$

(ii) Montrer que $f'(\lambda_0) = 0$ et $f''(\lambda_0) > 0$.

On remarque tout d'abord que $f(\lambda_0) = 0$ (puisque $(0,\lambda_0) \in I \times J$ et $P(0,\lambda_0) = 0$).
Calculons les dérivées première et seconde de l'application $\gamma : \lambda \in J \to P(f(\lambda),\lambda)$. Pour tout $\lambda \in J$,

$$\begin{aligned}
\gamma'(\lambda) &= f'(\lambda)\partial_x P(f(\lambda),\lambda) + \partial_\lambda P(f(\lambda),\lambda),\\
\gamma''(\lambda) &= f''(\lambda)\partial_x P(f(\lambda),\lambda) + f'(\lambda)^2\partial_x^2 P(f(\lambda),\lambda) + 2f'(\lambda)\partial_{x\lambda}^2 P(f(\lambda),\lambda) + \partial_\lambda^2 P(f(\lambda),\lambda).
\end{aligned}$$

D'après la définition de f, γ est la fonction nulle. On en déduit

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma'(\lambda_0)\\
&= f'(\lambda_0)\partial_x P(f(\lambda_0),\lambda_0) + \partial_\lambda P(f(\lambda_0),\lambda_0),\\
&= f'(\lambda_0)\partial_x P(0,\lambda_0) + \partial_\lambda P(0,\lambda_0)\\
&= f'(\lambda_0)\partial_x P(0,\lambda_0).
\end{aligned}$$

Comme $\partial_x P(0, \lambda_0) \neq 0$, on en déduit que $f'(\lambda_0) = 0$.
On a aussi

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma''(\lambda_0) \\ &= f''(\lambda_0)\partial_x P(f(\lambda_0), \lambda_0) + f'(\lambda_0)^2 \partial_x^2 P(f(\lambda_0), \lambda_0) + 2f'(\lambda_0)\partial_{x\lambda}^2 P(f(\lambda_0), \lambda_0) + \partial_\lambda^2 P(f(\lambda_0), \lambda_0) \\ &= f''(\lambda_0)\partial_x P(0, \lambda_0) + \partial_\lambda^2 P(0, \lambda_0). \end{aligned}$$

Puisque $\partial_\lambda^2 P(0, \lambda_0) > 0$ et $\partial_x P(0, \lambda_0) < 0$, cette égalité implique

$$f''(\lambda_0) = -\frac{\partial_\lambda^2 P(0, \lambda_0)}{\partial_x P(0, \lambda_0)} > 0.$$

(iii) On note f_+ la restriction de f à $J \cap [\lambda_0; +\infty[$ et f_- sa restriction à $J \cap]-\infty; \lambda_0]$. Montrer que, quitte à prendre I et J un peu plus petits, on peut supposer que les images de f_+ et f_- sont des intervalles de $\mathbb{R}^+$ contenant 0 et que f_+ et f_- réalisent des bijections vers ces images.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $]\lambda_0 - \epsilon; \lambda_0 + \epsilon[\subset J$ et, pour tout $\lambda \in]\lambda_0 - \epsilon; \lambda_0 + \epsilon[$,

$$f''(\lambda) > 0.$$

Un tel ϵ existe puisque f'' est continue (car f est C^2) et strictement positive en λ_0.
On remplace J par l'intervalle ainsi défini : $J =]\lambda_0 - \epsilon; \lambda_0 + \epsilon[$. Sur cet intervalle, f'' est strictement positive donc f' est strictement croissante. Puisque $f'(\lambda_0) = 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(\lambda) < 0 \text{ pour tout } \lambda \in]\lambda_0 - \epsilon; \lambda_0[; \\ f'(\lambda) > 0 \text{ pour tout } \lambda \in]\lambda_0; \lambda_0 + \epsilon[. \end{aligned}$$

On en déduit que f_+ (la restriction de f à $[\lambda_0; \lambda_0 + \epsilon[$) est une fonction continue et strictement croissante (car de dérivée strictement positive sur l'intérieur de l'intervalle). Elle réalise donc une bijection de $[\lambda_0; \lambda_0 + \epsilon[$ vers

$$[f(\lambda_0); f(\lambda_0 + \epsilon)[= [0; f(\lambda_0 + \epsilon)[\subset \mathbb{R}^+.$$

De même pour f_-.

(iv) Montrer que, pour tout x au voisinage de 0,
- si $x < 0$, alors $M(x)$ n'a pas de valeur propre dans J ;
- si $x = 0$, alors λ_0 est l'unique valeur propre de $M(x)$ dans J ;
- si $x > 0$, alors $M(x)$ a exactement deux valeurs propres dans J, qui sont $f_-^{-1}(x)$ et $f_+^{-1}(x)$.

Soit $\eta > 0$ tel que $[0;\eta[\subset f_-(J\cap]-\infty;\lambda_0]) \cap f_+(J\cap[\lambda_0;+\infty[)$.
Soit $x \in I\cap]-\infty;\eta[$ quelconque.
Si $x < 0$, on a $f(\lambda) \neq x$ pour tout $\lambda \in J$ (car on a vu à la question précédence que $f(J)$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$). D'après la définition de f, on a donc $P(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in J$, c'est-à-dire que $M(x)$ n'a pas de valeur propre dans J.
Si $x = 0$, on a $f_-(\lambda_0) = 0 = x$. Comme f_- est injective, λ_0 est le seul antécédant de 0 par f_-. De même, λ_0 est le seul antécédant de 0 par f_+. On en déduit que λ_0 est le seul antécédant de 0 par f. Ainsi, pour tout $\lambda \in J$,

$$(P(x,\lambda) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x = 0 = f(\lambda)) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda = \lambda_0).$$

Donc λ_0 est l'unique valeur propre de $M(x)$ dans J.
Supposons enfin $x > 0$. Puisque $x \in [0;\eta[\subset f_-(J\cap]-\infty;\lambda_0])$, l'antécédant de x par f_-, noté $f_-^{-1}(x)$, existe et (comme f_- est injective) il est unique. De même, l'antécédant de x par f_+, noté $f_+^{-1}(x)$, existe et il est unique. Ainsi, x a exactement deux antécédants par f dans J, $f_-^{-1}(x)$ et $f_+^{-1}(x)$. Par définition de f, les valeurs propres de $M(x)$ dans J sont exactement ces antécédants.