Corrigé de l'exercice 1.8

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension infinie.
a) Vérifier que les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$,

$$||P||_1 := \sum_{i=0}^n |a_i|,$$
$$||P||_2 := \left(\sum_{i=0}^n (a_i)^2\right)^{1/2},$$
$$||P||_\infty := \max_{i=0,\dots,n} |a_i|.$$

Montrons que $||.||_1$ est une norme.

- Positivité : une somme de valeurs absolues est toujours positive.
- Séparation : soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ un polynôme quelconque.

$$\begin{aligned}
(||P||_1 = 0) &\iff \left(\sum_{i=0}^n |a_i| = 0\right) \\
&\iff (|a_i| = 0, \forall i = 0, \dots, n) \\
&\qquad \text{(Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.)} \\
&\iff (a_i = 0, \forall i = 0, \dots, n) \\
&\iff (P = 0).
\end{aligned}$$

- Homogénéité : pour tout polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et tout réel λ,

$$\begin{aligned}
||\lambda P||_1 &= \sum_{i=0}^{n} |\lambda a_i| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |\lambda|\, |a_i| \\
&= |\lambda| \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \\
&= |\lambda|\, ||P||_1.
\end{aligned}$$

- Inégalité triangulaire : soient $P(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i$ deux polynômes. Montrons que $||P+Q||_1 \leq ||P||_1 + ||Q||_1$.
  Posons $n = \max(n_1, n_2)$ et définissons $a_{n_1+1} = a_{n_1+2} = \cdots = a_n = 0$, et $b_{n_2+1} = b_{n_2+2} = \cdots = b_n = 0$, de sorte qu'on a

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

  (avec le même « n »!).
  On a alors

$$\begin{aligned}
||P+Q||_1 &= \sum_{i=0}^{n} |a_i + b_i| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| + |b_i| \\
&\quad \text{(inégalité triangulaire pour la valeur absolue)} \\
&= ||P||_1 + ||Q||_1.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $||.||_2$ est une norme.

- Positivité : une racine carrée est toujours positive.

- Séparation : soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme quelconque.

$$\begin{aligned}
(||P||_2 = 0) &\iff \left(\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2} = 0\right) \\
&\iff \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2 = 0\right) \\
&\iff \left(a_i^2 = 0, \forall i = 0, \ldots, n\right) \\
&\qquad \text{(Une somme de termes positifs est nulle si et} \\
&\qquad \text{seulement si chaque terme est nul.)} \\
&\iff (a_i = 0, \forall i = 0, \ldots, n) \\
&\iff (P = 0).
\end{aligned}$$

- Homogénéité : pour tout polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et tout réel λ,

$$\begin{aligned}
||\lambda P||_2 &= \left(\sum_{i=0}^{n}(\lambda a_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\lambda^2 \sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\lambda^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2} \\
&= |\lambda| \, ||P||_2.
\end{aligned}$$

- Inégalité triangulaire : soient P et Q deux polynômes. Comme précédemment, on peut supposer qu'ils s'écrivent

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

(avec le même « n »).

On a alors

$$\begin{aligned}
||P+Q||_2 &= \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2 + 2\sum_{i=0}^{n}a_ib_i + \sum_{i=0}^{n}(b_i)^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2 + 2\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{n}(b_i)^2\right)^{1/2} + \sum_{i=0}^{n}(b_i)^2\right) \\
&\quad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\left(\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=0}^{n}(b_i)^2\right)^{1/2}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=0}^{n}(b_i)^2\right)^{1/2} \\
&= ||P||_2 + ||Q||_2.
\end{aligned}$$

Traitons enfin le cas de $||.||_\infty$.

- Positivité : un maximum de réels positifs est nécessairement positif.
- Séparation : si $P=0$, alors $||P||_\infty = \max\{0\} = 0$.
  Réciproquement, soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ un polynôme tel que $||P||_\infty = 0$. Alors, pour tout $i = 0, \ldots, n$,
  $$0 \leq |a_i| \leq \max_{j=0,\ldots,n} |a_j| = ||P||_\infty = 0.$$
  Donc, pour tout i, $|a_i| = 0$, ce qui entraîne $a_i = 0$. Donc $P = 0$.
- Homogénéité : pour tout polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ et tout réel λ,
  $$\begin{aligned}
  ||\lambda P||_\infty &= \max_{i=0,\ldots,n} |\lambda a_i| \\
  &= \max_{i=0,\ldots,n} |\lambda|\,|a_i| \\
  &= |\lambda| \max_{i=0,\ldots,n} |a_i| \\
  &= |\lambda|\,||P||_\infty.
  \end{aligned}$$
- Inégalité triangulaire : soient P et Q deux polynômes. Comme précédemment, on peut supposer qu'ils s'écrivent
  $$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i.$$

Pour tout $i = 0, \dots, n$,

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| \leq \max_{j=0,\dots,n} |a_j| + \max_{k=0,\dots,n} |b_k| = ||P||_\infty + ||Q||_\infty.$$

Chacun des nombres $|a_i + b_i|$ pour $i = 0, \dots, n$ étant inférieur à $||P||_\infty + ||Q||_\infty$, leur maximum l'est aussi :

$$||P + Q||_\infty = \max_{i=0,\dots,n} |a_i + b_i| \leq ||P||_\infty + ||Q||_\infty.$$

Remarquer que

$$\frac{||P||_1}{n+1} \leq ||P||_\infty \leq ||P||_2 \leq ||P||_1 \leq \sqrt{n+1}||P||_2 \leq (n+1)||P||_\infty.$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ et on définit $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On observe que

$$||P||_1 = ||a||_1, \quad ||P||_2 = ||a||_2, \quad ||P||_\infty = ||a||_\infty,$$

où $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ sont les normes sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définies comme à l'exercice 1.7 (avec $\mathbb{R}^{n+1}$ au lieu de $\mathbb{R}^n$).
Ainsi, la suite d'inégalités démontrée dans la question b) de l'exercice 1.7 (où il faut remplacer « n » par « $n + 1$ ») entraîne exactement celle qui nous est demandé ici.

b) Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes deux à deux (considérer $P_n(x) = \sum_{i=0}^n x^i$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n comme dans l'indication et on observe que

$$||P_n||_1 = \sum_{i=0}^n 1 = n + 1;$$
$$||P_n||_2 = \left(\sum_{i=0}^n 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{n+1};$$
$$||P_n||_\infty = \max_{i=0,\dots,n} 1 = 1.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $||.||_1$ et $||.||_2$ sont équivalentes. Soient $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout polynôme P,

$$C_1||P||_2 \leq ||P||_1 \leq C_2||P||_2.$$

Pour tout n, si on applique cette double inégalité à $P = P_n$, on en déduit

$$C_1\sqrt{n+1} \leq n + 1 \leq C_2\sqrt{n+1}.$$

En particulier, $\sqrt{n+1} \leq C_2$ pour tout n. C'est absurde car $\sqrt{n+1} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, tandis que $C_2 \not\to +\infty$.

De même, supposons par l'absurde que $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes. Soient C_1, C_2 telles que, pour tout P,

$$C_1||P||_\infty \leq ||P||_1 \leq C_2||P||_\infty.$$

On en déduit que, pour tout n, $n+1 = ||P_n||_1 \leq C_2||P_n||_\infty = C_2$, ce qui est absurde.
Enfin, supposons par l'absurde que $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes. Soient C_1, C_2 telles que, pour tout P,

$$C_1||P||_\infty \leq ||P||_2 \leq C_2||P||_\infty.$$

On en déduit que, pour tout n, $\sqrt{n+1} = ||P_n||_2 \leq C_2||P_n||_\infty = C_2$, ce qui est absurde.

c) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 2. Noter que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. $||.||_1, ||.||_2$ et $||.||_\infty$ définies en a) sont des normes aussi sur $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'elles sont équivalentes dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit sous la forme $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ avec $n = 2$. On déduit donc de la fin de la question a) que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\frac{||P||_1}{3} \leq ||P||_\infty \leq ||P||_2 \leq ||P||_1 \leq \sqrt{3}||P||_2 \leq 3||P||_\infty.$$

En particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\frac{||P||_1}{3} \leq ||P||_2 \leq ||P||_1,$$

donc $||.||_1$ et $||.||_2$ sont équivalentes. De même, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\frac{||P||_1}{3} \leq ||P||_\infty \leq ||P||_1,$$

donc $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes. Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$||P||_\infty \leq ||P||_2 \leq 3||P||_\infty,$$

donc $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.