Corrigé de l'exercice 1.9

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et de rang constant égal à 1 (c'est-à-dire que $\dim(Im(df(x,y))) = 1$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). On suppose que $f(x,0) = (x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un voisinage V de $(x,0)$ avec $f(V) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. À l'aide de l'exercice précédent, montrer qu'il existe des voisinages V_1, V_2 de $(x,0)$ et des applications C^1, $\phi : V_1 \to \mathbb{R}^2, \psi : V_2 \to \mathbb{R}^2$, telles que
   - $\phi(x,0) = \psi(x,0) = (x,0)$;
   - ϕ et ψ sont des C^1-difféomorphismes vers leurs images ;
   - pout tout $(y_1,y_2) \in V_1$, $\psi \circ f \circ \phi(y_1,y_2) = (y_1,0)$.

On commence par supposer que $x = 0$; le cas général s'en déduit par simple translation. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifie bien $f(0,0) = (0,0)$. Elle est, par hypothèse, de rang constant 1 au voisinage de 0. Il existe donc deux C^1-difféomorphismes $\phi : V_1 \to V_1', \psi : V_2 \to V_2'$, avec V_1, V_1', V_2, V_2' des voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$, tels que

$$\phi(0,0) = \psi(0,0) = (0,0)$$

et, pour tout (y_1,y_2) assez proche de 0 (c'est-à-dire pour tout (y_1,y_2) dans V_1, quitte à prendre V_1 et V_1' un peu plus petits),

$$\psi \circ f \circ \phi(y_1,y_2) = (y_1,0).$$

Dans le cas où $x \neq 0$, on applique le résultat qu'on vient de démontrer à $f_x : z \in \mathbb{R}^2 \to f((x,0)+z) - (x,0)$. On note ϕ_x, ψ_x les difféomorphismes correspondants. En définissant

$$\phi : z \in \mathbb{R}^2 \to \phi_x(z - (x,0)) + (x,0),$$
$$\psi : z \in \mathbb{R}^2 \to \psi_x(z - (x,0)) + (x,0),$$

on a bien toutes les propriétés voulues.

(ii) En déduire qu'il existe des voisinages V_3, V_4 de $(x,0)$ et des applications C^1, $\lambda : V_3 \to \mathbb{R}, \mu : V_4 \to \mathbb{R}^2$ telles que

— $\lambda(x,0) = x$ et $\mu(x,0) = (x,0)$;
— pour tout $(y_1, y_2) \in V_3$, $f(y_1,y_2) = \mu(\lambda(y_1,y_2),0)$.

Définissons $V_4 = \psi(V_2)$ et $\mu = \psi^{-1}$. Notons en outre $\pi_1 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to x_1 \in \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée. Définissons $V_3 = \phi(V_1)$, $\lambda = \pi_1 \circ \phi^{-1}$.
D'après les propriétés de ϕ et ψ, on a

$$\lambda(x,0) = \pi_1(\phi^{-1}(x,0)) = \pi_1(x,0) = x;$$
$$\mu(x,0) = \psi^{-1}(x,0) = (x,0).$$

Pour tout $(y_1,y_2) \in V_3$, on a $(y_1,y_2) = \phi(z_1,z_2)$ pour $(z_1,z_2) = \phi^{-1}(y_1,y_2) \in V_1$. On a donc

$$f(y_1,y_2) = f \circ \phi(z_1,z_2) = \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \phi(z_1,z_2)) = \psi^{-1}(z_1,0) = \mu(z_1,0).$$

De plus, $(z_1,z_2) = \phi^{-1}(y_1,y_2)$ donc $z_1 = \pi_1 \circ \phi^{-1}(y_1,y_2) = \lambda(y_1,y_2)$. Ainsi, on a bien, pour tout $(y_1,y_2) \in V_3$,

$$f(y_1,y_2) = \mu(\lambda(y_1,y_2),0).$$

(iii) Montrer que l'application $z \to \lambda(z,0)$ est inversible au voisinage de x. En déduire que, pour tout (y_1,y_2) assez proche de $(x,0)$, il existe z tel que

$$\lambda(y_1,y_2) = \lambda(z,0).$$

L'application $\Lambda : z \in \mathbb{R} \to \lambda(z,0) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1. On observe que $\Lambda(x) = x$. Pour montrer qu'elle réalise une bijection sur un certain voisinage de x, il suffit de montrer que $\Lambda'(x) \neq 0$ (c'est le théorème d'inversion locale, en dimension 1).
Pour cela, on observe que, pour tout z assez proche de x, on a, d'après la question 2,

$$f(z,0) = \mu(\lambda(z,0),0) = \mu(\Lambda(z),0).$$

De plus, on a par hypothèse, pour tout z,

$$f(z,0) = (z,0).$$

Ainsi, pour tout z assez proche de x,

$$(z,0) = \mu(\Lambda(z),0).$$

Dérivons cette égalité par rapport à z. Pour tout z assez proche de x,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1}(x,0)\Lambda'(x) \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x_1}(x,0)\Lambda'(x) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a nécessairement $\Lambda'(x) \neq 0$, ce qui montre bien l'inversibilité de Λ au voisinage de x.
Soient E_1, E_2 des voisinages de x dans $\mathbb{R}$ tels que Λ réalise une bijection de E_1 vers E_2. Pour tout (y_1,y_2) assez proche de $(x,0)$, $\lambda(y_1,y_2)$ appartient à E_2. Il existe alors $z \in E_1$ tel que

$$\lambda(y_1,y_2) = \Lambda(z) = \lambda(z,0).$$

(iv) En déduire que, pour tout (y_1, y_2) assez proche de $(x, 0)$, il existe z tel que $f(y_1, y_2) = (z, 0)$ et conclure.

Pour tout (y_1, y_2) assez proche de $(x, 0)$, d'après la question précédente, il existe $z \in E_1$ tel que $\lambda(y_1, y_2) = \lambda(z, 0)$. D'après la question 2, on a

$$f(y_1, y_2) = \mu(\lambda(y_1, y_2), 0) = \mu(\lambda(z, 0), 0).$$

De plus, d'après la question 2, on a, pour tout z assez proche de x,

$$f(z, 0) = \mu(\lambda(z, 0), 0).$$

Ainsi, pour tout (y_1, y_2) assez proche de $(x, 0)$,

$$f(y_1, y_2) = f(z, 0) = (z, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$