Corrigé de l'exercice 12 de la deuxième partie

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne :

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^2| \right)^{1/2},$$

et on définit alors sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$N(M) := \sup \{ ||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1 \}.$$

o. Montrer que, pour tous $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^n$,

$$||MX||_1 \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |M_{i,j}| \right) ||X||_\infty.$$

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^n$ quelconques.

$$\begin{aligned}
||MX||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(MX)_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} X_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |M_{i,j} X_j| \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}| |X_j| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}| \left(\max_{s=1,\ldots,n} |X_s| \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}| \right) ||X||_\infty.
\end{aligned}$$

Attention à ne pas aller trop vite dans la partie du raisonnement où on applique l'inégalité triangulaire : il n'est par exemple pas vrai que, pour tout i,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} X_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}\right| \max_{j=1,\dots,n} |X_j|.$$

(Contre-exemple : $n = 2$, $M_{i,1} = X_1 = 1, M_{i,2} = X_2 = -1$.)

a. Montrer que N est bien définie (on pourra utiliser le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie).

Avant de répondre à la question, attention à bien comprendre les définitions. Pour toute matrice M, l'ensemble $\{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$ est l'ensemble de « tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $||MX||$ pour au moins un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 ». La définition ne parle donc pas d'un « X » en particulier qui serait fixé ; ici, « X » est une variable muette qui peut représenter tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Quant à $N(M)$, c'est la borne supérieure de l'ensemble $\{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$; c'est donc un réel, pas un ensemble.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Définissons

$$E_M = \{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}.$$

Pour montrer que $N(M)$ est bien définie, il faut montrer que l'ensemble E_M admet une borne supérieure. Il suffit donc de montrer que cet ensemble est non-vide et majoré.

L'ensemble E_M est non-vide : si on note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a que $||Me_1||$ est un élément de E_M.

Montrons que l'ensemble E_M est majoré. Soient $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ telles que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$,

$$C_1||Y|| \leq ||Y||_\infty \leq C_2||Y||,$$
$$C_3||Y||_1 \leq ||Y|| \leq C_4||Y||_1.$$

De telles constantes existent puisque les normes $||.||, ||.||_\infty, ||.||_1$ sont équivalentes.

Définissons $D = C_2C_4\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |M_{i,j}|\right)$. Soit $\alpha \in E_M$ quelconque. Montrons que $\alpha \leq D$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $||X|| = 1$ et

$$\alpha = ||MX||.$$

(Un tel X existe d'après la définition de E_M.)

Alors

$$\begin{aligned}
\alpha &= ||MX|| \\
&\leq C_4 ||MX||_1 \\
&\leq C_4 \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |M_{i,j}| \right) ||X||_\infty \qquad \text{(par o.)} \\
&\leq C_2 C_4 \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |M_{i,j}| \right) ||X|| \\
&= C_2 C_4 \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |M_{i,j}| \right) \\
&= D.
\end{aligned}$$

On a donc montré que E_M était majoré par D.

b. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Positivité : On définit e_1 comme précédemment. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(M)$ est la borne supérieure, donc un majorant, de l'ensemble $\{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$, qui contient $||Me_1||$. On a donc

$$N(M) \geq ||Me_1|| \geq 0.$$

Homogénéité : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
N(\lambda M) &= \sup\{||\lambda MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\} \\
&= \sup\{|\lambda| \, ||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\} \\
&= |\lambda| \sup\{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\} \\
&= |\lambda| N(M).
\end{aligned}$$

Séparation : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons $M = 0$. Dans ce cas, $||MX|| = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. Donc

$$N(M) = \sup\{0\} = 0.$$

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque telle que $N(M) = 0$. Montrons que $M = 0$.

Pour tout $j = 1, \ldots, n$, on note e_j le vecteur de $\mathbb{R}^n$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j-ème qui vaut 1.

Pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$0 \leq ||Me_j|| \leq N(M) = 0.$$

(La deuxième inégalité provient du fait que $N(M)$ est un majorant de $\{||MX||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$.) Donc $Me_j = 0$, c'est-à-dire que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$0 = (Me_j)_i = M_{i,j}.$$

On a ainsi montré que, pour tous i, j, $M_{i,j} = 0$. Donc $M = 0$.

Attention à ne pas écrire quelque chose comme « Il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $MX = 0$, donc $M = 0$. ». En effet, il existe des matrices $M \neq 0$ et des vecteurs $X \neq 0$ tels que $MX = 0$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Inégalité triangulaire</u> : Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $||X|| = 1$,

$$\begin{aligned} ||(M_1 + M_2)X|| &= ||M_1X + M_2X|| \\ &\leq ||M_1X|| + ||M_2X|| \\ &\leq N(M_1) + N(M_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $N(M_1) + N(M_2)$ est un majorant de $\{||(M_1 + M_2)X||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$. Comme la borne supérieure de cet ensemble est le plus petit de ses majorants,

$$N(M_1 + M_2) \leq N(M_1) + N(M_2).$$

c. Montrer que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $||MX|| \leq N(M)||X||$. En déduire que pour toutes $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(MM') \leq N(M)N(M')$.

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Montrons que $||MX|| \leq N(M)||X||$.
Si $X = 0$, alors $||MX|| = 0 = N(M)||X||$ donc l'inégalité est vraie.
Si $X \neq 0$, on pose $X' = \frac{X}{||X||}$. Alors $||X'|| = 1$ donc

$$N(M) \geq ||MX'|| = \frac{||MX||}{||X||}.$$

On obtient l'inégalité demandée en multipliant par $||X||$.
Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ de norme 1,

$$\begin{aligned} ||MM'X|| &= ||M(M'X)|| \\ &\leq N(M)||M'X|| \qquad \text{(par le début de la question)} \\ &\leq N(M)N(M') \qquad \text{(par la définition de } N(M')\text{)}. \end{aligned}$$

Donc $N(M)N(M')$ est un majorant de $\{||MM'X||, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } ||X|| = 1\}$, ce qui implique que $N(MM') \leq N(M)N(M')$.

d. Montrer que si $N(M) \leq 1/2$, alors toutes les valeurs propres réelles de M (s'il y en a) appartiennent à $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(M) \leq 1/2$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M et X un vecteur propre non nul associé à cette valeur propre. Alors

$$\begin{aligned} |\lambda| \, ||X|| &= ||\lambda X|| \\ &= ||MX|| \\ &\leq N(M)||X|| \qquad \text{(d'après c.)} \\ &\leq \frac{1}{2}||X||. \end{aligned}$$

Donc $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

e. En déduire que si $N(M) \leq 1/2$, alors $I + M$ est inversible.

Raisonnons par contraposée. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I+M$ n'est pas inversible. Cela signifie que le noyau de $I + M$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$(I + M)X = 0.$$

Fixons un tel X. Alors $MX = -IX = -X$, ce qui entraîne que -1 est valeur propre de M. Comme -1 n'appartient pas à $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on a nécessairement $N(M) > 1/2$, d'après la question d.

f. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(M) \leq \nu$, la matrice $A+M$ est inversible. (On pourra utiliser $A+M = A(I + A^{-1}M)$.)

Définissons $\nu = \frac{1}{2N(A^{-1})}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(M) \leq \nu$. Montrons que $A + M$ est inversible.

D'après la question c., $N(A^{-1}M) \leq N(A^{-1})N(M) \leq N(A^{-1})\nu = \frac{1}{2}$. D'après la question e., $I + A^{-1}M$ est donc inversible. Puisque A est inversible et puisqu'un produit de matrices inversibles est inversible, la matrice

$$A(I + A^{-1}M) = A + M$$

est inversible.

g. Conclure que $GL_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles) est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque. Il faut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B_N(A, r) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Soit $\nu > 0$ comme à la question précédente. Posons $r = \nu$.

Pour toute $B \in B_N(A, r)$, on a $N(B-A) < r = \nu$ donc, d'après la question f., $A+(B-A) = B$ est inversible. Ainsi,

$$B_N(A, r) \subset GL_n(\mathbb{R}).$$