Corrigé partiel de l'exercice 2.18

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Soit $A = ([a;b], \gamma)$ une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$, de classe C^2, paramétrée par abscisse curviligne. (On a donc $\gamma(a) = \gamma(b), \gamma'(a) = \gamma'(b), \gamma''(a) = \gamma''(b)$.)
Pour tout t, on note $\tau(t) = \gamma'(t)$ le vecteur tangent à A en $\gamma(t)$ et $N(t)$ un vecteur unitaire tel que $(\tau(t), N(t))$ forme une base orthonormée *directe*.

(i) Montrer que, pour tout t, il existe $\overline{K}_A(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau'(t) = \overline{K}_A(t) N(t).$$

On appelle $\overline{K}_A(t)$ la *courbure algébrique* de A au point $\gamma(t)$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer un résultat énoncé dans le cours :

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = 2\pi \text{ ou } -2\pi.$$

On note γ_1 la première coordonnée de γ et on fixe $t_0 \in [a;b]$ tel que

$$\gamma_1(t_0) = \min_{t\in[a;b]} \gamma_1(t).$$

(ii) Justifier qu'on peut supposer $t_0 = a$. On fera cette hypothèse dans la suite.

(iii) Montrer que $\tau(a) = (0, -1)$ ou $\tau(a) = (0, 1)$. Dans la suite, on supposera que $\tau(a) = (0, -1)$.

Pour tout t, $\tau(t)$ est un élément de S^1. Il peut donc s'écrire, en notation complexe, $e^{i\phi(t)}$ pour un certain réel $\phi(t)$. On fixe pour la suite de tels réels $\phi(t)$ et on admet qu'on peut le faire de sorte que la fonction $\phi : [a;b] \to \mathbb{R}$ ainsi définie soit C^1.

(iv) Exprimer N et $\overline{K}_A$ en fonction de ϕ et ϕ'. En déduire que

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Soit $E = \{(t_1, t_2) \in [a;b], t_1 \leq t_2\}$. Pour tout $(t_1, t_2) \in E$, on définit

$$\begin{aligned} S(t_1,t_2) &= \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||} && \text{si } t_1 \neq t_2 \text{ et } (t_1,t_2) \neq (a,b), \\ &= \tau(t_1) && \text{si } t_1 = t_2, \\ &= -\tau(a) && \text{si } (t_1,t_2) = (a,b). \end{aligned}$$

(v) Montrer que S est une application continue à valeurs dans S^1.

Pour tous t_1, t_2 tels que $t_1 \neq t_2$ et $(t_1, t_2) \neq (a, b)$,

$$\left|\left|\frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||}\right|\right| = \frac{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||}{||\gamma(t_2) - \gamma(t_1)||} = 1.$$

De plus, $||\tau(t)|| = 1$ pour tout t car γ est une abscisse curviligne. L'application S est donc bien à valeurs dans S^1.

Montrons la continuité. L'application est continue sur $\{(t_1, t_2) \in [a; b], t_1 < t_2, (t_1, t_2) \neq (a, b)\}$, comme quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il suffit donc de montrer que S est continue en (t, t) pour tout $t \in [a; b]$, et en (a, b).

<u>Continuité en (t, t) pour $t \in [a; b]$ quelconque</u> : soit $(t_{1,n}, t_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers (t, t). On va montrer que

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(t, t).$$

On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange. Pour tous t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$,

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1) - (t_2 - t_1)\gamma'(t_1)| \leq \frac{M}{2}|t_1 - t_2|^2,$$

avec $M = \max_{h\in[a;b]} ||\gamma''(h)||$. On peut alors écrire que, pour tous les n tels que $t_{1,n} < t_{2,n}$,

$$\begin{aligned}
&\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n}) = (t_{2,n} - t_{1,n})\left(\gamma'(t_{1,n}) + O(t_{2,n} - t_{1,n})\right) \\
\Rightarrow\ & \frac{\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})}{||\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n})||} = \frac{\gamma'(t_{1,n}) + O(t_{2,n} - t_{1,n})}{||\gamma'(t_{1,n}) + O(t_{2,n} - t_{1,n})||} = \gamma'(t_{1,n}) + o(1) = \tau(t_{1,n}) + o(1).
\end{aligned}$$

(On a utilisé, pour l'avant-dernière égalité, le fait que $||\gamma'(t_{1,n})|| = 1$ pour tout n.)

On peut ainsi écrire que, pour tout n,

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) = \tau(t_{1,n}) + o(1).$$

(On vient de le démontrer pour les n tels que $t_{1,n} < t_{2,n}$ mais c'est vrai aussi pour les n tels que $t_{1,n} = t_{2,n}$, d'après la définition de S.)

Comme τ est continue (car γ est C^2), on a bien

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) = \tau(t_{1,n}) + o(1) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tau(t) = S(t, t).$$

<u>Continuité en (a, b)</u> : soit $(t_{1,n}, t_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers (a, b). On va montrer que

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(a, b).$$

Par Taylor-Young,

$$\begin{aligned}
\gamma(t_{2,n}) - \gamma(t_{1,n}) &= \gamma(t_{2,n}) - \gamma(b) + \gamma(a) - \gamma(t_{1,n}) \\
&= -\gamma'(b)(b - t_{2,n}) + o(b - t_{2,n}) - \gamma'(a)(t_{1,n} - a) + o(t_{1,n} - a) \\
&= (b - a + t_{1,n} - t_{2,n})\left(-\gamma'(a) + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous les n tels que $(t_{1,n}, t_{2,n}) \neq (a, b)$,

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) = \frac{-\gamma'(a) + o(1)}{|| - \gamma'(a) + o(1)||} = -\gamma'(a) + o(1).$$

D'après la définition de S, cette égalité est aussi valable pour les n tels que $(t_{1,n}, t_{2,n}) = (a, b)$. Ainsi,

$$S(t_{1,n}, t_{2,n}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma'(a) = -\tau(a) = S(a, b).$$

Pour tout $(t_1, t_2) \in E$, on fixe $\psi(t_1, t_2)$ de sorte que

$$S(t_1, t_2) = e^{i\psi(t_1,t_2)}.$$

On admet qu'on peut choisir les réels $\psi(t_1, t_2)$ de sorte que ψ soit une fonction continue.

(vi) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in [a; b]$,

$$\psi(t, t) = \phi(t) + 2\pi n.$$

En déduire que

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = \psi(b, b) - \psi(a, a).$$

Pour tout $t \in [a; b]$,

$$e^{i\psi(t,t)} = S(t, t) = \tau(t) = e^{i\phi(t)}.$$

Ainsi, $\psi(t, t) - \phi(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme l'application $t \to \psi(t, t) - \phi(t)$ est continue et comme $2\pi\mathbb{Z}$ est un ensemble discret, l'application doit être constante : il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout t,

$$\psi(t, t) = \phi(t) + 2\pi n.$$

On a alors, en utilisant le résultat de la question (iv),

$$\int_a^b \overline{K}_A(t)dt = \phi(b) - \phi(a) = \phi(b) + 2\pi n - (\phi(a) + 2\pi n) = \psi(b, b) - \psi(a, a).$$

(vii) Montrer que, pour tout $t \in [a; b[$, $\psi(a, t) - \psi(a, a) \in [0; \pi]$. En déduire que

$$\psi(a, b) - \psi(a, a) = \pi.$$

Pour tout $t \in [a; b[$, $\gamma_1(t) \geq \gamma_1(t_0) = \gamma_1(a)$. Pour tout $t \in]a; b[$, la première coordonnée de $e^{i\psi(a,t)} = S(a, t)$ est donc

$$\frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(a)}{||\gamma(t) - \gamma(a)||} \geq 0.$$

Comme cette première coordonnée est égale à $\cos(\psi(a, t))$ (par définition de l'exponentielle complexe), on en déduit que $\psi(a, t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$.

De plus, $e^{i\psi(a,a)} = S(a,a) = \tau(a) = (0,-1)$ donc $\psi(a,a) \in \{-\frac{\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$.
Ainsi, pour tout $t \in [a;b[$,

$$\psi(a,t) - \psi(a,a) \in [0;\pi] + 2\pi\mathbb{Z} = ... \cup [-2\pi;-\pi] \cup [0;\pi] \cup [2\pi;3\pi] \cup ...$$

Comme $t \in [a;b[\to \psi(a,t) - \psi(a,a)$ est continue et vaut 0 en a, on doit avoir, pour tout $t \in [a;b[$,

$$\psi(a,t) - \psi(a,a) \in [0;\pi].$$

Comme ψ est continue, cette propriété est aussi vraie pour $t = b$.
Puisque $e^{i\psi(a,b)} = S(a,b) = -\tau(a) = (0,1)$, on peut dire que $\psi(a,b) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et donc

$$\psi(a,b) - \psi(a,a) \equiv \pi[2\pi].$$

Puisque $\psi(a,b) - \psi(a,a) \in [0;\pi]$, on a donc

$$\psi(a,b) - \psi(a,a) = \pi.$$

(viii) Montrer que $\psi(b,b) - \psi(a,b) = \pi$ et conclure.

On utilise un raisonnement très similaire à la question précédente. Pour tout $t \in]a;b[$,

$$(S(t,b))_1 = \frac{\gamma_1(b) - \gamma_1(t)}{||\gamma(t) - \gamma(b)||} = \frac{\gamma_1(a) - \gamma_1(t)}{||\gamma(t) - \gamma(b)||} \leq 0.$$

Donc $\cos(\psi(t,b)) \leq 0$ et $\psi(t,b) \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$.
Comme $\psi(b,b) \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$ (puisque $e^{i\psi(b,b)} = \tau(a) = (0,-1)$), on a, pout tout $t \in]a;b[$ (et donc aussi pour $t \in [a;b]$, par continuité),

$$\psi(b,b) - \psi(t,b) \in [0;\pi] + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Puisque $t \to \psi(b,b) - \psi(t,b)$ est continue et vaut 0 en $t = b$, on peut dire que, pour tout $t \in [a;b]$,

$$\psi(b,b) - \psi(t,b) \in [0;\pi].$$

Comme précédemment, $\psi(a,b) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\psi(b,b) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc

$$\psi(b,b) - \psi(a,b) = \pi.$$

D'après ce résultat et ceux des deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{K}_A(t)dt &= \psi(b,b) - \psi(a,a) \\ &= \psi(b,b) - \psi(a,b) + \psi(a,b) - \psi(a,a) \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$