Corrigé partiel de l'exercice 2.22

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

On va montrer à l'inverse que la nappe S_1 paramétrée par

$$f : (u, v) \to (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u)) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi, \pi[)$$

et l'hélicoïde S_2 paramétré par

$$g : (u, v) \to (u\cos(v), u\sin(v), v) \qquad (u > 0,\ v \in]-\pi, \pi[)$$

ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

(i) Pour tout (u, v), calculer $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$. Montrer que

$$(e_1, e_2) \overset{def}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right)$$

forme une base orthonormale de $T_{f(u,v)}S_1$.

On a, pour tout (u, v),

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (\cos(v), \sin(v), \frac{1}{u}),$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (-u\sin(v), u\cos(v), 0).$$

On observe que

$$\left|\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right|\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}},$$
$$\left|\left| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right|\right| = u, \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0.$$

Cela entraîne que

$$(e_1, e_2) = \left(\frac{(\cos(v), \sin(v), \frac{1}{u})}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}}, \frac{(-u\sin(v), u\cos(v), 0)}{u} \right)$$

est une famille orthonormale. Comme elle engendre $Df_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) = T_{f(u,v)}S_1$, c'est une base orthonormale de $T_{f(u,v)}S_1$.

(ii) Soit ν^{S_1} une application de Gauss de S_1 (c'est-à-dire une application continue à images dans S^2, telle que pour tout p, $\nu_p^{S_1} \in T_pS_1^{\perp}$). Calculer, pour tout (u,v), $\nu_{f(u,v)}^{S_1}$ (au signe près).

Soit (u,v) quelconque. Le vecteur $\nu_{f(u,v)}^{S_1}$ est l'unique (au signe près) élément de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{gathered}\left\langle \nu_{f(u,v)}^{S_1}, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\rangle = 0;\\ \left\langle \nu_{f(u,v)}^{S_1}, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\rangle = 0;\\ \left|\left|\nu_{f(u,v)}^{S_1}\right|\right| = 1.\end{gathered}$$

Notons-le (a,b,c) et calculons-le. Les équations se récrivent

$$\begin{gathered}a\cos(v) + b\sin(v) + \frac{c}{u} = 0;\\ -a\sin(v) + b\cos(v) = 0;\\ a^2 + b^2 + c^2 = 1.\end{gathered}$$

On a donc, si $\cos(v) \neq 0$,

$$\begin{gathered}b = a\tan(v);\\ c = -\frac{u}{\cos(v)}a;\\ a^2\left(\frac{1+u^2}{\cos^2(v)}\right) = 1,\end{gathered}$$

de sorte qu'au signe près,

$$\nu_{f(u,v)}^{S^1} = (a,b,c) = \left(\frac{\cos(v)}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{\sin(v)}{\sqrt{1+u^2}}, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right).$$

On vérifie que l'équation est toujours valable lorsque $\cos(v) = 0$.

(iii) Soit (u,v) fixé. On définit

$$\begin{gathered}\forall t \in]-u:+\infty[, \quad \gamma(t) = f(u+t,v);\\ \forall t \in]-v-\pi; -v+\pi[, \quad \delta(t) = f(u, v+t).\end{gathered}$$

Montrer que

$$\begin{aligned}(\nu^{S_1}\circ\gamma)'(0) &= -\frac{e_1}{1+u^2};\\ (\nu^{S_1}\circ\delta)'(0) &= \frac{e_2}{\sqrt{1+u^2}}.\end{aligned}$$

Pour tout t,

$$\begin{aligned}(\nu^{S_1}\circ\gamma)(t) &= \nu^{S_1}_{\gamma(t)}\\ &= \nu^{S_1}_{f(u+t,v)}\\ &= \left(\frac{\cos(v)}{\sqrt{1+(u+t)^2}}, \frac{\sin(v)}{\sqrt{1+(u+t)^2}}, -\frac{u+t}{\sqrt{1+(u+t)^2}}\right).\end{aligned}$$

On dérive par rapport à t en 0 :

$$\begin{aligned}(\nu^{S_1}\circ\gamma)'(0) &= \left(-\frac{u\cos(v)}{(1+u^2)^{3/2}}, -\frac{u\sin(v)}{(1+u^2)^{3/2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}+\frac{u^2}{(1+u^2)^{3/2}}\right)\\ &= -\frac{u}{(1+u^2)^{3/2}}(\cos(v),\sin(v),\frac{1}{u})\\ &= -\frac{e_1}{1+u^2}.\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour δ.