Corrigé de l'exercice 2.5

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

On fixe un nombre $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et on définit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ (avec des notations complexes) par

$$\gamma(t) = (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi ct})$$

où $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(i) Montrer que γ est une immersion en tout point de $\mathbb{R}$.

Il faut montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) \neq 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma'(t) = (2i\pi e^{2i\pi t}, 2i\pi c e^{2i\pi ct}).$$

Or $2i\pi e^{2i\pi t} \neq 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas, donc $\gamma'(t) \neq 0$.

(ii) Montrer que $\gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

[On rappelle que, pour tout nombre irrationnel x, $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.]
Soit $x \in \mathbb{T}^2$ quelconque. Montrons qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que

$$\gamma(t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Puisque x est dans $\mathbb{T}^2$, il peut s'écrire (en notation complexe)

$$x = (e^{2i\pi\alpha}, e^{2i\pi\beta})$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour toute suite t, on a $\gamma(t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ si et seulement si

$$e^{2i\pi t_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2i\pi\alpha} \quad \text{et} \quad e^{2i\pi ct_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2i\pi\beta},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$e^{2i\pi(t_n-\alpha)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad e^{2i\pi(ct_n-\beta)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe deux suites d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$t_n - \alpha - k_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad ct_n - \beta - l_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$

Cherchons les suites d'entiers k, l et la suite de réels t de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \alpha + k_n.$$

Avec ce choix, pour que la propriété (1) soit vérifiée, il suffit que

$$l_n - ck_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c\alpha - \beta.$$

Or, d'après l'indication, $\mathbb{Z} + (-c)\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc k, l des suites d'entiers vérifiant $l_n - ck_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c\alpha - \beta$, ce qui conclut.

(iii) L'ensemble $\gamma(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^4$?

La réponse est non. Nous allons le démontrer par l'absurde. Supposons donc que $\gamma(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. La démonstration repose sur les deux propriétés suivantes.

Propriété 1. *La variété $\gamma(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{T}^2$.*

Propriété 2. *L'ensemble $\mathbb{T}^2 - \gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.*

Démonstration de la propriété 1. La variété $\gamma(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathbb{T}^2$. Montrons qu'il est ouvert. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert V_1 de $\gamma(t_0)$ tel que

$$V_1 \cap \mathbb{T}^2 \subset \gamma(\mathbb{R}).$$

Puisque $\gamma(\mathbb{R})$ est une variété, il existe $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ des voisinages ouverts de (respectivement) $\gamma(t_0)$ et 0 ainsi qu'un difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ tels que

$$\phi(\gamma(\mathbb{R}) \cap V_1) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}^{4-d}) \cap V_2,$$

où d est la dimension de $\gamma(\mathbb{R})$.
Comme $(\mathbb{R}^d \times \{0\}^{4-d}) \cap V_2$ est un fermé de V_2, $\gamma(\mathbb{R}) \cap V_1$ (qui est son antécédant par ϕ) est un fermé de V_1 (qui est l'antécédant par ϕ de V_2), c'est-à-dire

$$\gamma(\mathbb{R}) \cap V_1 = \overline{\gamma(\mathbb{R})} \cap V_1.$$

Or $\gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$. On a donc

$$\mathbb{T}^2 \subset \overline{\gamma(\mathbb{R})},$$

d'où

$$V_1 \cap \mathbb{T}^2 \subset \gamma(\mathbb{R}).$$

□

Démonstration de la propriété 2. Soient $x_0 = (e^{2i\pi\alpha_0}, e^{2i\pi\beta_0}) \in \mathbb{T}^2$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Montrons que
$$\big(B(x_0,\epsilon) \cap \mathbb{T}^2\big) \cap \big(\mathbb{T}^2 - \gamma(\mathbb{R})\big) \neq \emptyset. \tag{2}$$
Définissons
$$A = \left\{(e^{2i\pi\alpha_0}, e^{2i\pi\beta}) \text{ tq } \left|e^{2i\pi\beta} - e^{2i\pi\beta_0}\right| < \epsilon\right\}.$$
C'est un sous-ensemble de $B(x_0,\epsilon) \cap \mathbb{T}^2$. Par un argument de dénombrabilité, on va montrer que
$$A \cap \big(\mathbb{T}^2 - \gamma(\mathbb{R})\big) \neq \emptyset,$$
ce qui implique l'équation (2).
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $\gamma(t) \in A$, alors
$$e^{2i\pi t} = e^{2i\pi\alpha_0},$$
c'est-à-dire que $t = \alpha_0 + k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi,
$$A \cap \gamma(\mathbb{R}) \subset \{\gamma(\alpha_0 + k), k \in \mathbb{Z}\},$$
ce qui entraîne que $A \cap \gamma(\mathbb{R})$ est dénombrable. Comme A n'est pas dénombrable, on ne peut pas avoir $A \subset \gamma(\mathbb{R})$. En conséquent,
$$A \cap \big(\mathbb{T}^2 - \gamma(\mathbb{R})\big) \neq \emptyset,$$
$\square$

La combinaison des deux propriétés donne une contradiction : $\mathbb{T}^2 - \gamma(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$. Il est donc dense dans tout ouvert non-vide de $\mathbb{T}^2$. En particulier, il est dense dans $\gamma(\mathbb{R})$, donc $\gamma(\mathbb{R})$ et son complémentaire dans $\mathbb{T}^2$ sont d'intersection non-vide. C'est absurde.