# Corrigé de l'exercice 2.6

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

On considère l'application de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

(i) Montrer que $f$ est une immersion de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ de classe $C^\infty$.

Les deux composantes de $f$ sont des fractions rationnelles ; c'est donc une application $C^\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \left(\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\right).$$

Cette expression permet de voir que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, la première coordonnée de $f'$ s'annule seulement en $2^{-1/3}$ et la deuxième seulement en 0 et $2^{1/3}$ ; les deux ne sont donc jamais simultanément nulles.

(ii) Montrer que $f$ est injective.

Soient $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = f(s)$.
Si $t = 0$, alors

$$\left(\frac{3s}{1+s^3}, \frac{3s^2}{1+s^3}\right) = f(s) = f(t) = 0,$$

donc $s = 0 = t$. De même, si $s = 0$, alors $t = 0$ donc $t = s$.
Supposons maintenant $t \neq 0$ et $s \neq 0$. Notons $f_1, f_2$ les deux coordonnées de $f$. Alors $f_1(t) \neq 0$ et $f_1(s) \neq 0$. On a donc

$$t = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{f_2(s)}{f_1(s)} = s.$$

Dans tous les cas, on a donc $t = s$.

(iii) Montrer que $f\left(\frac{1}{t}\right) = (3t^2, 3t) + o(t^2)$ lorsque $t \to 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right) &= \left(\frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1}\right) \\ &= \Big(3t^2(1+O(t^3)), 3t(1+O(t^3))\Big) \\ &= (3t^2, 3t) + o(t^2). \end{aligned}$$

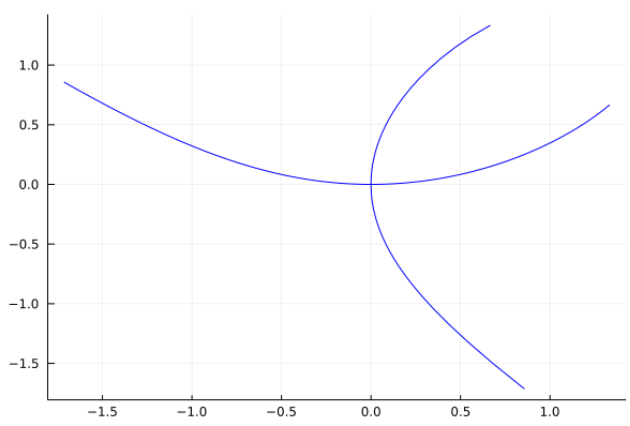
(iv) Soit $\epsilon \in ]0;1[$ quelconque. Montrer que, pour tout $t$ tel que $\epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$,

$$f(t) \notin ]-\epsilon;\epsilon[ \times \mathbb{R}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tel que $\epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$,

$$\begin{aligned} |f_1(t)| &= \left|\frac{3t}{1+t^3}\right| \\ &\geq \frac{3|t|}{2\max(1, |t|^3)} \\ &= \frac{3}{2}\min\left(|t|, \frac{1}{|t|^2}\right) \\ &\geq \frac{3}{2}\epsilon \\ &> \epsilon. \end{aligned}$$

(v) Dessiner l'allure de $f(\mathbb{R})$ au voisinage de $f(0)$.



(vi) Montrer que $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, en nous inspirant en partie de l'exercice 2.10.
Considérons les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & ]-1;1[ & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & f(t); \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_2 : & ]-1;1[ & \to & \mathbb{R}^2 & \\ & t & \to & f(0) & \text{si } t = 0, \\ & t & \to & f\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0. \end{array}$$

L'application $\gamma_1$ est de classe $C^1$ (et même $C^\infty$) car $f$ l'est. L'application $\gamma_2$ est dérivable sur $]-1;1[-\{0\}$ avec, pour tout $t$,

$$\gamma_2'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) = \left(-\frac{3t(t^3-2)}{(t^3+1)^2}, -\frac{3(2t^3-1)}{(t^3+1)^2}\right).$$

D'après la question (iii), elle est également dérivable en 0, de dérivée

$$\gamma_2'(0) = (0,3).$$

L'application $\gamma_2$ est donc dérivable sur tout son ensemble de définition, et même $C^1$ puisque $\gamma_2'(t) \to \gamma_2'(0)$ quand $t \to 0$.
Ainsi, d'après la définition de l'espace tangent, $\gamma_1'(0) = (3,0)$ et $\gamma_2'(0) = (0,3)$ appartiennent à l'espace tangent de la variété en $(0,0)$. Comme $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, cela signifie que l'espace tangent est $\mathbb{R}^2$ tout entier. La variété doit donc être de dimension 2.
Mais si la variété est de dimension 2, c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, d'après l'exercice 2.1. En particulier, puisqu'elle contient $(0,0)$, c'est un voisinage de $(0,0)$. Ceci est faux : comme $f_1(t) \neq 0$ pour tout $t \neq 0$, on peut par exemple remarquer que $(0,y) \notin f(\mathbb{R})$ pour tout $y \neq 0$.
On a donc abouti à une contradiction.