# Corrigé de l'exercice 12 de la troisième partie

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Soient $(X, || \,||)$ un espace vectoriel normé et $A, B$ deux parties de $X$.
1. On suppose que $A$ et $B$ sont compactes. Démontrer que $A \times B$ est compacte dans $X \times X$.
Remarque : ce n'est pas explicitement précisé mais il convient de munir $X \times X$ de la norme produit associée à la norme de $X$ :

$$\forall (a, b) \in X^2, \quad ||(a, b)||_{X\times X} \overset{def}{=} \max(||a||, ||b||).$$

Soit $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $A \times B$. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente, dont la limite appartient à $A \times B$.
Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un élément de $A$ qu'on note $a^*$. Une telle extraction existe puisque $A$ est compacte et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A$.
Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(b_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un élément de $B$ qu'on note $b^*$. Une telle extraction existe puisque $B$ est compacte et $(b_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $B$.
La composée $\phi \circ \psi$ est une extraction. De plus, comme toute sous-suite d'une suite convergente converge, vers la même limite que la suite de départ, on a

$$a_{\phi(\psi(n))} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a^*.$$

Comme on a également $b_{\phi(\psi(n))} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b^*$, la propriété de la question c) de l'exercice 14 entraîne que $((a_{\phi(\psi(n))}, b_{\phi(\psi(n))}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a^*, b^*)$, qui est un élément de $A \times B$.
On a donc bien exhibé une sous-suite convergeant vers un élément de $A \times B$.

2. On suppose que $A$ est compacte et $B$ fermée dans $X$. Démontrer que $A + B$ est fermée dans $X$.
Démontrons la fermeture de $A + B$ par caractérisation séquentielle. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A + B$, qui converge dans $X$. On note $z^*$ sa limite. Montrons que $z^*$ appartient à $A + B$.
Pour tout $n$, soient $a_n \in A, b_n \in B$ tels que

$$z_n = a_n + b_n.$$

Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $A$, qu'on note $a^*$. Une telle extraction existe car $A$ est compacte.
Une différence de suites convergentes converge vers la différence des limites :

$$b_n = z_n - a_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z^* - a^*.$$

Puisque $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $B$ et puisque $B$ est fermée, $z^* - a^* \in B$.
Ainsi, $z^* = a^* + (z^* - a^*) \in A + B$.