Corrigé de l'exercice 3.4

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Soit $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*_+)$ telle que $\|f(t,x)\| \leq F(\|x\|)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty.$$

Soit (I, x) la solution maximale du problème de Cauchy associé à f, pour une donnée initiale x_0 :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in I, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

(i) Soit $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la primitive de $\frac{1}{F}$ telle que $G(0) = 0$. Quel est son sens de variation ? Quelle est sa limite en $+\infty$?

La fonction G est dérivable et sa dérivée, $\frac{1}{F}$, est strictement positive. Cette fonction est donc strictement croissante.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $G(t) = \int_0^t \frac{ds}{F(s)}$. Ainsi,

$$\lim_{+\infty} G = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty.$$

(ii) On note $r(t) = \|x(t)\|$ et $\Omega = \{t \in I \cap \mathbb{R}^+, r(t) > 0\}$. Montrer que r est dérivable sur Ω et que, pour tout $t \in \Omega$,

$$(G \circ r)'(t) \leq 1.$$

La norme euclidienne est dérivable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$: c'est la composée de la racine carrée, qui est dérivable sur tout son ensemble de définition sauf 0, et de l'application $x \to \langle x, x \rangle$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et ne s'annule qu'en 0.
La fonction x est dérivable (c'est une solution du problème de Cauchy). L'application $t \to ||x(t)||$ est donc dérivable en tout réel t tel que $x(t) \neq 0$; elle est donc dérivable sur Ω.

Pour tout $t \in \Omega$,

$$\begin{aligned}(G \circ r)'(t) &= r'(t)G'(r(t)) \\ &= \left\langle x'(t), \frac{x(t)}{||x(t)||} \right\rangle G'(||x(t)||) \\ &= \left\langle f(t, x(t)), \frac{x(t)}{||x(t)||} \right\rangle \frac{1}{F(||x(t)||)} \\ &\leq \frac{||f(t, x(t))||}{F(||x(t)||)} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

(iii) Montrer que, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$G \circ r(t) \leq G(||x_0||) + t.$$

Attention : à la question précédente, on a montré que $(G \circ r)'(t) \leq 1$ pour tout t dans Ω, pas pour tout t dans $I \cap \mathbb{R}^+$. On ne peut donc pas écrire que, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$G \circ r(t) = G(||x_0||) + \int_0^t (G \circ r)'(s)ds \leq G(||x_0||) + \int_0^t 1ds.$$

Soit $t \in I \cap \mathbb{R}^+$. Si $[0; t] \subset \Omega$, on sait, d'après la question précédente, que $G \circ r$ est dérivable sur $[0; t]$ et

$$(G \circ r)'(s) \leq 1 \quad \text{pour tout } s \in [0; t].$$

Ainsi,

$$G \circ r(t) = G(||x_0||) + \int_0^t (G \circ r)'(s)ds \leq G(||x_0||) + \int_0^t 1ds = G(||x_0||) + t.$$

Traitons maintenant le cas où $[0; t] \not\subset \Omega$, ce qui revient à dire que x s'annule sur $[0; t]$. Notons

$$t_0 = \max\{s \in [0; t] \text{ tq } x(s) = 0\}.$$

(L'ensemble est fermé, borné et non-vide : il a donc bien un maximum.)
Si $t_0 = t$, on a, en utilisant la croissance de G,

$$G \circ r(t) = G \circ r(t_0) = G(0) \leq G(||x_0||) \leq G(||x_0||) + t.$$

Si $t_0 < t$, on a

$$\begin{aligned} G \circ r(t) &= G \circ r(t_0) + \int_{t_0}^{t} (G \circ r)'(s) ds \\ &\qquad (G \circ r \text{ est dérivable sur }]t_0; t] \subset \Omega) \\ &\leq G \circ r(t_0) + \int_{t_0}^{t} 1 ds \quad \text{par (ii)} \\ &= G(0) + (t - t_0) \\ &\leq G(||x_0||) + t. \end{aligned}$$

(iv) En déduire que la solution (I, x) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : $I = \mathbb{R}$.

On commence par montrer que $\mathbb{R}^+ \subset I$. Par l'absurde, supposons que $b \overset{def}{=} \sup I < +\infty$. D'après le théorème 3.3 du cours (≪ lemme des bouts ≫), on peut dire que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe $t_K \in I$ tel que $x(t) \notin K$ pour tout $t \in [t_K; b[$.
Soit $R > 0$ tel que $G(R) > G(||x_0||) + b$. Un tel R existe car G tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On applique le théorème 3.3 pour $K = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, R)$. Alors, pour tout $t \in [t_K; b[$, $||x(t)|| > R$, de sorte que

$$\begin{aligned} G(||x_0||) + b &\geq G(||x_0||) + t \\ &\geq G \circ r(t) \quad \text{par (iii)} \\ &= G(||x(t)||) \\ &> G(R) \\ &> G(||x_0||) + b. \end{aligned}$$

C'est impossible. On a donc bien montré que $\mathbb{R}^+ \subset I$.
Pour montrer que $\mathbb{R}^- \subset I$, on définit $\tilde{I} = \{-t, t \in I\}$ et $\tilde{x} : t \to x(-t)$. On observe que $(\tilde{I}, \tilde{x})$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = -f(-t, \tilde{x}(t)), & \forall t \in I \\ \tilde{x}(0) = x_0. \end{cases}$$

C'est de plus une solution maximale (si elle n'était pas maximale, on pourrait en déduire une extension de (I, x), ce qui contredirait le fait que (I, x) est maximale). D'après ce qu'on vient de montrer, $\mathbb{R}^+ \subset \tilde{I}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^- \subset I$.