Corrigé des exercices 1.7 et 1.8

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1.7

Écrire sous la forme d'une assertion avec quantificateurs les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel possède une racine carrée réelle.

Attention, dire qu'un nombre « possède une racine carrée réelle » ne veut pas dire que « sa racine carrée est un nombre réel ». Cela veut dire qu'il existe un réel satisfaisant la définition de la racine carrée (c'est-à-dire qu'il existe un réel dont le carré est le nombre).

Un nombre x possède une racine carrée réelle s'il existe un réel y dont le carré vaut x. L'énoncé s'écrit donc

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x.$$

2. Tout entier naturel possède un réel positif plus grand que lui.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq n.$$

3. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \leq n.$$

Exercice 1.8

Dans cet exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Pour chaque énoncé ci-dessous, écrire une phrase en français courant (sans quantificateurs) ayant la même signification logique.

(a) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

Pour tout réel y, la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y)$ veut dire « f vaut y en tout point », c'est-à-dire « f est constante de valeur y ».

La proposition $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y)$ veut donc dire « il existe un réel y tel que f est constante de valeur y », soit plus simplement « f est constante ».

(b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

Cet énoncé signifie « tout réel y appartient à l'image de f » soit, plus simplement, « l'image de f est $\mathbb{R}$ tout entier ». En utilisant un vocabulaire que vous verrez bientôt si ce n'est pas déjà fait, cela se dit « f est surjective ».

(c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x')$.

Pour tout réel x, la proposition $(\forall x' \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x'))$ signifie « la fonction f admet un minimum en x ». La proposition $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x'))$ signifie donc « il existe un réel x tel que f admet un minimum en x » soit, plus simplement, « la fonction f admet un minimum ».

Pour chacune des phrases ci-dessous, écrire une assertion utilisant les quantificateurs et ayant la même signification logique.

(a) La fonction f ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

(b) La fonction f n'est pas nulle.

L'énoncé « f est la fonction nulle » s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

L'énoncé « f n'est pas la fonction nulle » est sa négation,

$$\mathrm{NON}(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0),$$

c'est-à-dire

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

(c) La fonction f est strictement croissante.

La fonction f est strictement croissante si, pour tous réels x, y tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Autrement dit, elle est strictement croissante si, pour tous réels x, y, la propriété $(x < y)$ implique $(f(x) < f(y))$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y)).$$