

Corrigé des exercices 2.3 et 2.4

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 2.3

Dans tout l'exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et on suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f(x) < \epsilon.$$

1. On introduit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 5f(x)^2$.

Démontrer que g vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon.$$

Pour éviter les confusions entre les différentes variables, on renomme celles de l'hypothèse : f vérifie la propriété

$$\forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f(y) < \eta. \quad (1)$$

Démontrons maintenant que

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque.

[Remarque : la phrase « Soit $\epsilon > 0$ quelconque. » est indispensable. Elle signifie « on choisit un réel strictement positif arbitraire ; on l'appelle ϵ et on garde ensuite sa valeur fixée jusqu'à la fin de la démonstration ».]

Démontrons $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon$. Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g(x) < \epsilon$.

Posons $\eta = \sqrt{\frac{\epsilon}{5}}$.

[Remarque : si on n'avait pas écrit « Soit $\epsilon > 0$ quelconque. », cette définition de η n'aurait pas de sens. On ne peut pas définir η avec une formule faisant intervenir ϵ si on n'a pas dit ce qu'était ϵ .]

D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta.$$

Fixons un tel y pour la suite du raisonnement.

Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et puisque $0 < f(y) < \eta$, on a

$$\begin{aligned} 0 &< f(y)^2 < \eta^2 \\ \text{donc } 0 &< 5f(y)^2 < 5\eta^2 \\ \text{c'est-à-dire } 0 &< g(y) < 5 \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{5}} \right)^2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Posons $x = y$. D'après la ligne précédente, on a

$$0 < g(x) < \epsilon.$$

On a donc trouvé x vérifiant la propriété voulue.

2. On introduit la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = f(x^2)$.
Démontrer que h vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < h(x) < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Démontrons

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < h(x) < \epsilon.$$

Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < h(x) < \epsilon$.

Soit $\eta = \epsilon$. D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta. \tag{2}$$

Fixons un tel y .

Posons $x = \sqrt{y}$. C'est bien un élément de \mathbb{R}_+^* .

[Ici, on définit x (à partir de y) et non y (qui a déjà été défini avant). On écrit donc « Posons $x = \sqrt{y}$. » et pas « Posons $y = x^2$. ».]

De plus, $h(x) = f(x^2) = f(y)$ donc, d'après l'inégalité (2)

$$0 < h(x) < \eta = \epsilon.$$

On a donc trouvé x vérifiant la propriété voulue.

[Remarque : attention, dans cette question, à être rigoureux/se avec les manipulations de fonctions. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé, on ne peut PAS affirmer que

$$f(x^2) = f(x)^2.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont des réels fixés tels que $f(x) = f(y)$, on ne peut PAS affirmer que

$$f(x^2) = f(y^2).$$

On ne peut PAS NON PLUS supposer que f est croissante.]

3. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x})}$.
Démontrer que φ vérifie la propriété suivante :

$$\forall A > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) > A.$$

Soit $A > 0$ quelconque. Démontrons

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) > A.$$

Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(x) > A$.

Posons $\eta = \frac{1}{A}$. C'est un réel strictement positif. D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta.$$

Fixons un tel y .

Posons $x = y^2$. C'est un élément de \mathbb{R}_+^* . On a $\varphi(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x})} = \frac{1}{f(y)}$. Comme $f(y) < \eta$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(y)} > \frac{1}{\eta} = A.$$

Donc $\varphi(x) > A$; on a trouvé x vérifiant la propriété voulue.

[Remarque : l'inégalité $0 < f(y) < \eta$ permet d'affirmer que $\frac{1}{f(y)} > \frac{1}{\eta}$ mais PAS que

$$0 > \frac{1}{f(y)}.$$

L'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement positif, jamais strictement négatif.]

Exercice 2.4

1. Soit x un nombre réel.

(a) Montrer que si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.

Par contraposée, il suffit de montrer que si $x \geq 2$, alors $x^3 \neq 2$. Pour cela, supposons que $x \geq 2$ et démontrons que $x^3 \neq 2$.

La fonction cube est croissante donc, puisque $x \geq 2$, on a aussi $x^3 \geq 2^3 = 8 > 2$, et donc $x \neq 2$.

(b) Montrer que si $x + 1$ est le carré d'un entier impair, alors x est un entier multiple de 4.

On veut montrer l'implication

$$(x + 1 \text{ est le carré d'un entier impair}) \Rightarrow (x \text{ est un entier multiple de } 4).$$

Pour cela, supposons que $x + 1$ est le carré d'un entier impair et montrons que x est un entier multiple de 4. Soit n un entier impair tel que

$$x + 1 = n^2.$$

Puisque n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Fixons un tel k .
On a alors

$$\begin{aligned}x + 1 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ \Rightarrow x &= 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k).\end{aligned}$$

Ainsi, x est un produit d'entiers (4 est entier et $k^2 + k$ aussi). C'est donc un entier. Cela démontre de plus que x est le produit de 4 et d'un entier ($k^2 + k$); x est donc divisible par 4.

Soient a, b deux nombres réels.

(a) Montrer l'implication suivante : $(b - a > 0) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, (b - a)^2 > \epsilon)$.

Supposons que $b - a > 0$. Montrons $\exists \epsilon > 0, (b - a)^2 > \epsilon$.

Posons $\epsilon = \frac{(b-a)^2}{2}$. Comme $b - a \neq 0$, on a que $(b - a)^2 > 0$ et donc $\epsilon > 0$.

De plus, $1 > \frac{1}{2}$ et la multiplication par un réel strictement positif conserve les inégalités strictes. On a donc

$$(b - a)^2 \times 1 > (b - a)^2 \times \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $(b - a)^2 > \epsilon$.

(b) Montrer l'implication suivante : $(\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |a - x| + |b - x| < \epsilon) \Rightarrow (a = b)$.

Par contraposée, il suffit de montrer

$$(a \neq b) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |a - x| + |b - x| \geq \epsilon).$$

Pour cela, supposons que $a \neq b$. Montrons que

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |a - x| + |b - x| \geq \epsilon. \tag{3}$$

Soit $\epsilon = |a - b|$. Puisque $a \neq b$, on a $a - b \neq 0$ et donc $\epsilon > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après l'inégalité triangulaire en version « différence »,

$$|a - x| + |b - x| \geq |(a - x) - (b - x)| = |a - b| = \epsilon.$$

Notre réel ϵ vérifie donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, |a - x| + |b - x| \geq \epsilon,$$

ce qui démontre (3).