Corrigé de l'exercice 2.6

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 2.6

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n + 3^n \leq 5^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $2^n + 3^n \leq 5^n$ ».
Nous allons démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5 = 5^1$ donc $2^1 + 3^1 = 5^1$, d'où $2^1 + 3^1 \leq 5^1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned}
5^{n+1} &= 5 \times 5^n \\
&\geq 5 \times (2^n + 3^n) \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&= 5 \times 2^n + 5 \times 3^n \\
&\geq 2 \times 2^n + 3 \times 3^n \\
&= 2^{n+1} + 3^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $(n!) \geq 2^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $(n!) \geq 2^n$ ».
Nous allons démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$.

- Initialisation : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \geq 16 = 2^4$, donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \geq 4$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n!) \times (n+1) \\
&\geq 2^n \times (n+1) \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie} \\
&\geq 2^n \times (4+1) \text{ car } n \geq 4 \\
&\geq 2^n \times 2 \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

[Remarque : ici, la récurrence n'est pas la manière la plus simple de démontrer la propriété voulue. Toutefois, c'est par récurrence que nous allons raisonner puisque l'objectif de l'exercice est de nous entraîner à utiliser cette technique.]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ ».
Nous allons démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $2^{1-1} = 2^0 = 1 = 1! = 1^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n!) \times (n+1)\\ &\geq 2^{n-1} \times (n+1) \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\\ &\geq 2^{n-1} \times (1+1) \text{ car } n \geq 1\\ &= 2^{(n+1)-1}.\end{aligned}$$

Donc $2^{(n+1)-1} \leq (n+1)!$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= (n+1)^n \times (n+1)\\ &\geq n^n \times (n+1) \text{ car la fonction } (x \to x^n) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+\\ &\geq (n!) \times (n+1) \text{ car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\\ &= (n+1)!.\end{aligned}$$

Donc $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.